תרגיל 13 אנליזה הרמונית תש"ף

27 בינואר 2020

1. (מועד א' תשע"ט) נתונה הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{2\pi}{\left(1+x\right)^{3}} & x\geq0\\ 0 & x<0 \end{cases}$$

חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(\omega\right)\right|d\omega$$

<u>פתרון:</u>
במקום $\hat{f}$ נסמן $F\left[f\right]$, לשם הנוחות. כעת, אם $F\left[f\right]$ הייתה אינטגרבילית בהחלט, לפי התמרה כפולה היינו מקבלים:

$$\frac{1}{2\pi}f\left(-x\right)=F\left[F\left[f\right]\right]\left(x\right)$$

ואפשר לרשום: $f\left(x\right)=2\pi F\left[F\left[f\right]\right]\left(-x\right)$. התמרה היא רציפה, ולכן הפונקציה באגף ימין היא רציפה, אך f לא רציפה בום סתירה ולכן F לא אינטגרבילית בהחלט, כלומר האינטגרל שווה ל-∞.

באופן דומה - שאלה 11במועד ב' תשע"ט, שאלה 5 מועד ג' תשע"ד, שאלה 3 מועד א' תשע"ג וכו'.

2. (מועד א', תשע"ד) היעזרו בהתמרת פורייה כדי לחשב את האינטגרל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cdot\frac{\sin b\omega}{\omega}d\omega$$

כאשר $a,b>0$.

<u>פתרון:</u>

נסמן:

$$f_{a}\left(x\right)=\begin{cases} 1 & -a\leq x\leq a\\ 0 & x<0 \end{cases}\qquad f_{b}\left(x\right)=\begin{cases} 1 & -b\leq x\leq b\\ 0 & x<0 \end{cases}$$

כעת, אנחנו יודעים:

$$\hat{f}_a\left(\omega\right)\frac{\sin a\omega}{\pi\omega},\quad \hat{f}_b\left(\omega\right)\frac{\sin b\omega}{\pi\omega}$$

לכן, נשתמש בפלנשרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cdot\frac{\sin b\omega}{\omega}d\omega=\pi^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\pi\omega}\cdot\frac{\sin b\omega}{\pi\omega}d\omega=$$

$$=\pi^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_a\left(x\right)\cdot f_b\left(x\right)dx$$

מכפלת הפונקציות היא:

$$f_a\left(x\right)\cdot f_b\left(x\right)=\begin{cases}1 & -\min\left\{a,b\right\}\leq x\leq\min\left\{a,b\right\}\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ולכן:

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\min\{a,b\}}^{\min\{a,b\}}1dx=\frac{\pi}{2}\cdot 2\min\left\{a,b\right\}=\pi\min\left\{a,b\right\}$$

3. (מועד ב' תשע"ט, על סמך שחזור מהדרייב): נתונה הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{2\pi}{(1+x)^2} & x\geq 0\\ -\frac{2\pi}{(1-x)^2} & x<0\end{cases}$$

חשבו את:

$$\lim_{M\longrightarrow\infty}\int_{-M}^{M}\hat{f}\left(\omega\right)d\omega$$

<u>**פתרון:**</u>

לפי הנוסחה להתמרה הפוכה:

$$\lim_{M\longrightarrow\infty}\int_{-M}^{M}\hat{f}\left(\omega\right)e^{i\omega t}d\omega=\frac{\lim\limits_{x\longrightarrow t^+}f\left(x\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow t^-}f\left(x\right)}{2}$$

ובפרט עבור $t=0$:

$$\lim_{M\longrightarrow\infty}\int_{-M}^{M}\hat{f}\left(\omega\right)d\omega=\frac{\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}f\left(x\right)+\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}f\left(x\right)}{2}=\frac{\frac{2\pi}{(1+0)^2}-\frac{2\pi}{(1-0)^2}}{2}=0$$