תרגיל 3 אנליזה הרמונית תש"ף

להגשה בשבוע במתחיל בג' כסלו, 1.12

1. על המרחב $\mathbb{R}_2\left[x\right]$ נגדיר מכפלה פנימית באופן הבא:

$$\left\langle p,q\right\rangle =p\left(-1\right)q\left(-1\right)+p\left(0\right)q\left(0\right)+p\left(1\right)q\left(1\right)$$

מצאו בסיס אורתוגונלי למרחב - קחו בסיס כלשהו והפעילו גרם־שמידט.

2. במרחב $C\left[-1,1\right]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\left\langle f,g\right\rangle =\int_{-1}^{1}f\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

מצאו את הקירוב הטוב ביותר לפונקציה $f\left(x\right)=e^{x}$ בתת־המרחב $U=span\left\{ 1,x,x^{2}\right\}$ (כלומר, את ההיטל של הפונקציה על U).

3. **שאלה קצת יותר תיאורטית, לא להתבאס אם לא מצליחים (ולא לעוף על עצמנו אם כן)** יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U\leq V$ תת־מרחב; יהי $\left\{ \tilde{v}_{1},\dots\tilde{v}_{n}\right\}$ בסיס אורתונורמלי של U. לכל $v\in V$, ההיטל האורתוגונאלי של v על U הוא:

$$\pi_{U}\left(v\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\langle v,\tilde{v}_{k}\right\rangle \tilde{v}_{k}$$

(א) הוכיחו שלכל $1\leq j\leq n$ מתקיים:

$$\left\langle v-\pi_{U}\left(v\right),\tilde{v}_{j}\right\rangle =0$$

כלומר, ההפרש בין הוקטור לבין ההיטל שלו מאונך לכל וקטור בבסיס של המרחב U (ולכן גם מאונך לכל וקטור במרחב U).

(ב) הוכיחו שלכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$\left\langle \pi_{U}\left(v\right),w\right\rangle =\left\langle v,\pi_{U}\left(w\right)\right\rangle$$