

תרגיל 1

1. הגדרה: נגיד שחוג R הוא חוג עם חילוק אם כל איבר שונה מס הפיך.
 - (א) הוכיחו שכל תחום סופי (כלומר, שמס' האיברים בו סופי) הוא חוג עם חילוק.
 - (ב) יהי R חוג עם חילוק, ו $S \subseteq R$ תת חוג. הוכיחו ש S תחום.
 - (ג) תנו דוגמא לחוג עם חילוק R ו $S \subseteq R$ תת חוג, כך ש S אינו חוג עם חילוק.
2. נגד שחוג R הוא בוליאני אם לכל $x \in R$ מתקיים: $x^2 = x$.
 - (א) תנו דוגמא לחוג בוליאני.
 - (ב) הוכיחו שבכל חוג בוליאני מתקיים: $1 + 1 = 0$.
 - (ג) הוכיחו שכל חוג בוליאני הוא קומוטטיבי.
3. יהי $R = (P(X), \Delta, \cap, \emptyset, X)$ החוג מהתרגול. תנו דוגמא לתת חוג בלי יחידה $S \subseteq R$, שאין בו את היחידה של R . האם יש לו יחידה? האם קיים ל R תת חוג (כלומר, עם היחידה של R)?
4. יהי R חוג ו $\{S_i | i \in I\}$ משפחה של תת חוגים. הוכיחו ש $\bigcap_{i \in I} S_i$ הוא תת חוג.
5. יהי R חוג שבו כל איבר שונה מס הפיך מימין. הוכיחו ש R הוא חוג עם חילוק.
6. יהי R חוג חילופי, ויהיו $x, y \in R$. הוכיחו שאם xy הפיך, אז גם x וגם y הפיכים. הפריכו זאת במקרה הלא חילופי.