תרגול 5 שאלה 4. פתרון

לפי הנתון, קיים n_1 כך שלכל $n_1 \le n, m$

$$\mu(\{|f_n - f_m| \ge \tfrac{1}{2}\}) < \tfrac{1}{2}$$

$$\vdots$$

קיים n_k כך שלכל $n_k < n, m$

$$\mu(\{|f_n - f_m| \ge \tfrac{1}{2^k}\}) < \tfrac{1}{2^k}$$

נגדיר לכל k: $E_k := \{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\}$

מהמונוטוניות של μ: $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$

ולכן: $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \le 1 \ (<\infty)$

נגדיר

$$E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k>n} E_k \quad (= \limsup E_k)$$

אזי $\mu(E) = 0$ (ראו תרגול 2 סעיף ב)

לכל $x \in E^c$ מתקיים $j > k_x$ - עבור k_x מספיק גדול

מתקיים (מדוע? לפי ההגדרה של limsup...)

$$|f_{n_j}(x) - f_{n_{k_x}}(x)| \le |f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)| + \dots + |f_{n_{k_x+1}}(x) - f_{n_{k_x}}|$$

$$\le \frac{1}{2^{j-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k_x}} \le \frac{1}{2^{k_x-1}}$$

כלומר - הסדרה $\{f_{n_k}\}$ היא סדרת קושי ב-E^c

ולכן מתכנסת כב"מ ($\mu(E)=0$) לפונקציה f

ולכן $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$. יהי $0<\varepsilon$ קיים k_0 כך שלכל $k \ge k_0$

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\}) \to 0$$

כיוון ש:

$$|f_n(x)-f(x)| \leq |f_n(x)-f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x)-f(x)|$$

$$\mu(\{|f_n-f|>\varepsilon\}) \leq \mu(\{|f_{n_k}-f|>\varepsilon\}) \to 0$$

וקבלנו $f_n \xrightarrow{\mu} f$ כנדרש.

<u>שאלה 7 תרגיל 1</u> א.

נתון ש ϕ מחזורית (עם מחזור שלם), ומכיוון ש f מ, לפי ההגדרה. לכן, מספיק להוכיח ש f סופית כמ"ע בקטע $I=[0,1]$

כמו כן, כיוון ש $m([0,1])=1<\infty$: $\int_I f\,dm<\infty \Rightarrow f$ סופית כמ"ע..

ואכן:

$$\int_I f(x)\,dm(x) = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(nx)}{n^2}\,dm(x)$$

$$\forall k: \quad \sum_{n=1}^{k} \frac{\phi(nx)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{|\phi(nx)|}{n^2} \xrightarrow{=: g^*} ~~\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\phi(nx)|}{n^2}~~$$

~~די להסתפק (המרכזי): לפי הנתון, g^* אינטגרבילית, ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית $\lim g_n$ אינטגרבילית. והמשפט...~~

לכן, לפי משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int_I f(x)\,dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \frac{\phi(nx)}{n^2}\,dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,n]} \frac{\phi(x)}{n^3}\,dm(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \frac{\phi(x)}{n^2}\,dm(x) \underset{\text{לפי הנתון.}}{<} \infty$$

כנדרש.