• הכלים המתמט"ים בסטטיסטיקה הן תורת ההסתברות

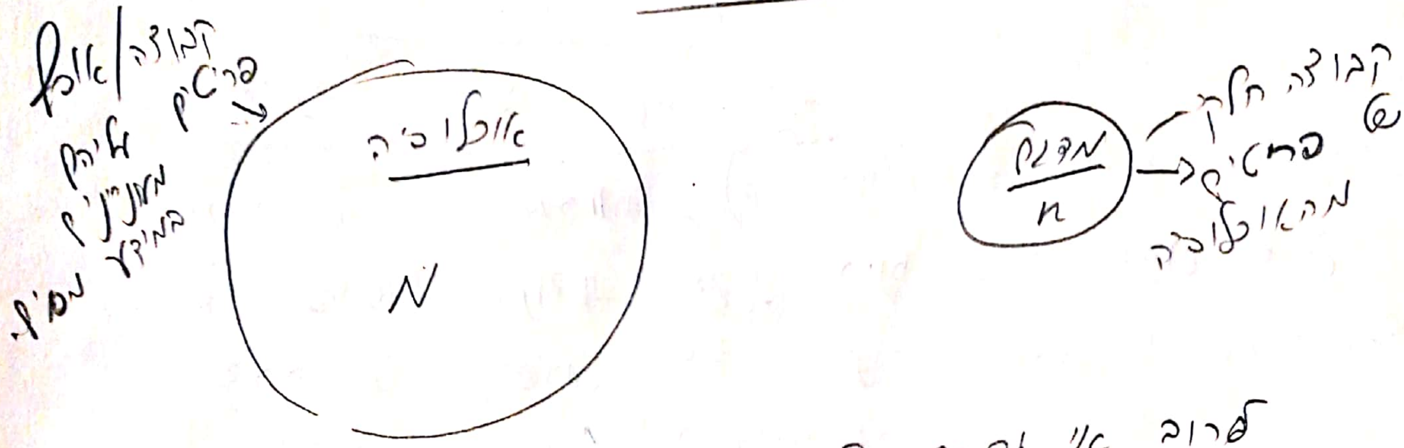
<u>הערה:</u>

בהסתברות יש מודל מתמטי/מודל הסתברותי ידוע ולפיו ניתן לצפות את הסיכוי...

בסטטיסטיקה מתעסקים בבנ"ת מודלים הסתברות"ים סופיים.

Scanned by CamScanner

הסקה סטטיסטית



לרוב אי אפשר לחקור את כל האוכלוסיה - אין גישה לכולה / גדולה מדי / מוגבלים בזמן וכד'. ולכן נרצה להסיק ממדגם "טוב" של האוכלוסיה.

סטטיסטי - גודל המחושב על (מתוך) המדגם. (פונ' של המדגם)

פרמטר - גודל המתאר את האוכלוסיה. (מסומן ב θ)

דוגמא: הממוצע כפרמטר מהאוכלוסיה $= \mu$ (קבוע)

" כסטטיסטי מהמדגם $= \bar{X}$ (משתנה ממדגם למדגם) (בעל התפלגות דגימה)

אומד - סטטיסטי המשמש לאמידת פרמטר באוכלוסיה ($\hat{\theta}$)

אומדן - ערכו המספרי של האומד.

אומד חסר הטיה - אומד $\hat{\theta}$ ייקרא חסר הטיה לפרמטר θ אם מתקיים $E[\hat{\theta}]=\theta$.

שגיאת אמידה $|\hat{\theta}-\theta|$ הפרש בין האומד לאמתי.

לדוגמא: האומד לממוצע האוכלוסיה μ הוא $\bar{X}=\frac{\sum x}{n}$

$E[\bar{X}]=\mu$ כי $\bar{X}$ אומד חסר הטיה ל-μ

Scanned by CamScanner

רווח סמך

שונות האוכלוסיה ידועה

זוהי אמידה מרווחית (באינטרוול) של פרמטר באוכלוסיה, ע"י שימוש בתוצאות המדגם. רווח הסמך נבנה כך שההסתברות שהפרמטר יהיה בתוך הקטע נקבעת מראש ושווה $1-\alpha$ (רמת הסמך) $1\geq\alpha\geq 0$.

ההסתברות שממוצע מדגם יהיה בדיוק הממוצע האמיתי אפסית.
רווח הסמך מאפשר לבדוק מרווח בטחון שהסיכוי ש-μ יפול בתוכו הוא $1-\alpha$. [α - רמת מובהקות]

$$P(A\leq\mu\leq B)=1-\alpha$$

A: גבול תחתון של רווח הסמך
B: גבול עליון ...

אורך רווח הסמך $L=B-A$

בבניית רווח סמך לתוחלת μ (σ^2 שונות ידועה)

פרמטר מבוקש μ

$X\sim N$ אמד נקודתי $\bar{X}$

נוסחה:

$$\bar{X}\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Scanned by CamScanner

מכונה מייצרת ברגים שאורכם מתפלג נורמלית עם תוחלת 4 ס"מ וסטיית תקן 0.2 ס"מ.
עקב תקלה במכונה הועלה חשד כי המכונה אינה מייצרת ברגים באורך הנדרש.
לשם בדיקה נלקח מדגם מקרי של 25 ברגים אשר יוצרו במכונה לאחר גילוי התקלה ונמצא כי האורך הממוצע שלהם הוא 3.9 ס"מ . נניח כי השונות נותרה ללא שינוי.

א. מהו רווח סמך (רו"ס) לתוחלת אורך הברגים לאחר התקלה ברמת מובהקות (ר"מ) 2% ?

ב. בונים רווח סמך לתוחלת ברמת בטחון של 95%, ע"י לקיחת מדגם של מספר מסויים של ברגים. כמה ברגים לפחות צריך לקחת על מנת שאורכו של רווח הסמך יהיה לכל היותר 0.1 ס"מ ?

ג. בנו רו"ס בגודל 0.118 ס"מ בעזרת מדגם בגודל 49 ברגים. מה רמת המובהקות α ?

פתרון:

א). נסמן ב- X את אורך הברגים לאחר התקלה , $X \sim N(\mu, 0.2^2)$. μ – כעת לא ידוע.

כמו כן נתון : $n=25$ ו- $\bar{X}=3.9$

רמת מובהקות של 2% $\Leftarrow$ $\alpha=0.02$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2.326$

רו"ס ברמת מובהקות של α לתוחלת כאשר השונות ידועה:

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

נציב את הנתונים ונקבל: $3.9-2.236\cdot\frac{0.2}{5}\le\mu\le3.9+2.236\cdot\frac{0.2}{5}$ $\Leftarrow$ $3.81\le\mu\le3.99$.

ב). נשתמש בנוסחה לרו"ס ברמת מובהקות של α לתוחלת כאשר השונות ידועה:

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

גודל רווח הסמך הוא: $2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

במקרה שלנו, רמת ביטחון של 95% $\Leftarrow$ $\alpha=0.05$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$.

נרצה שאורך רווח הסמך יהיה לכל היותר 0.1 לכן:

$$2\cdot1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{n}}\le0.1\Rightarrow\sqrt{n}\ge7.84\Rightarrow n\approx61.47.$$

ז"א שיש צורך במדגם בגודל 62 ברגים לפחות.

ג). גודל רווח הסמך הוא: $2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

במקרה שלנו $\alpha=?$.

$$2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{0.2}{\sqrt{49}}=0.118 \quad\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=2.06\Rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.98\Rightarrow\alpha=0.04$$

Scanned by CamScanner

שאלה 1:

כמות המינרלים בקידוחי מים בסביבה מסוימת מתפלגת נורמאלית. נתייחס לסדרת קידוחים בנקודות שונות בסביבה זו כמדגם מקרי .ממוצע תכולת המינרלים במים של 25 קידוחים הוא 248.3 מ"ג לליטר, ומניסויים קודמים ידוע שסטית התקן היא 15 מ"ג לליטר.מצאו רו"ס לתוחלת תכולת המינרלים ברמת בטחון של 90%.

שאלה 2:

חוקר ערך ניסוי ובדק את גובהם הממוצע של 16 ילדים. אלו התוצאות שקיבל (במטרים):

1.50	1.46	1.32	1.53	1.37	1.29	1.44	1.33	1.49	1.51
1.54	1.43	1.38	1.28	1.50	1.42	$\bar{X} = 1.424375$			

ידוע שסטיית התקן באוכלוסיה היא 10 ס"מ. אם החוקר קיבל את רווח הסמך הבא:

$1.3724 \le \mu \le 1.4765$, מהי רמת הביטחון $(1-\alpha)$?

שאלה 3:

משקל של ילדים מתפלג נורמלית עם סטית תקן 1.25 ק"ג. ידוע שממוצע מדגם בגודל n הוא 52 ק"ג . בונים רווח סמך לתוחלת ברמת בטחון של 95% .מה צריך להיות n ע"מ שאורכו של רווח הסמך יהיה 1 ?

Scanned by CamScanner

תשובה 1:

נסמן ב- X את תכולת המינרלים בקידוח , $X \sim N(\mu,15^2)$. כמו כן נתון : $n = 25$ ו- $\bar{X} = 248.3$

רמת בטחון של 90% $\Leftarrow$ $\alpha = 0.1$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ לכן נשתמש בנוסחאת רו"ס ברמת בטחון של

$(1-\alpha)\%$ לתוחלת כאשר השונות ידועה: $\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

נציב את הנתונים ונקבל: $248.3 - 1.645 \cdot \frac{15}{5} \le \mu \le 248.3 + 1.645 \cdot \frac{15}{5}$ $\Leftarrow$

$243.365 \le \mu \le 253.235$

תשובה 2:

נסמן ב- X את הגובה , $X \sim N(\mu, 0.1^2)$ (מכיוון ש-10 ס"מ הם 0.1 מטרים) $n = 16$

נחשב את הממוצע: $\bar{X} = \frac{22.79}{16} = 1.4244$. רו"ס ברמת בטחון של $1-\alpha$ לתוחלת כאשר השונות ידועה

הוא: $1.4244 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{4} \le \mu \le 1.4244 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{4}$. וידוע ש- $1.3724 \le \mu \le 1.4765$.

נשווה את החסם העליון ונקבל: $1.4244 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{4} = 1.4765$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.08$

$\Leftarrow$ $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9812$ $\Leftarrow$ $\alpha = 0.0376$. לכן רמת הביטחון היא 96.24%.

תשובה 3:

נשתמש בנוסחא רו"ס ברמת מובהקות של α לתוחלת כאשר השונות ידועה:

במקרה שלנו, רמת ביטחון של 95% $\Leftarrow$ $\alpha = 0.05$ $\Leftarrow$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. לכן נקבל

$52 - 1.96 \cdot \frac{1.25}{\sqrt{n}} \le \mu \le 52 + 1.96 \cdot \frac{1.25}{\sqrt{n}}$. נרצה שאורך רווח הסמך יהיה 1, ז"א שכל סטייה מהממוצע

שווה ל-0.5. $1.96 \cdot \frac{1.25}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow \sqrt{n} = 4.9 \Rightarrow n \approx 24$. ז"א שיש צורך במדגם בגודל 24 ילדים.

Scanned by CamScanner