חוג חילופי R, אידאל $I \lhd R$ כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$, מגדיר טופולוגיה על R (הטופולוגיה ה-I-אדית)

$U \subseteq R$ פתוחה $\Leftrightarrow$ לכל $x\in U$ קיים $n \geq 1$ כך ש- $x+I^n \subseteq U$.

הגדרנו: $\hat{R} = \varprojlim_{n} R/I^n = \{(a_1+I, a_2+I^2, \dots) \mid a_n \in R,\ a_n-a_m \in I^m$ לכל $n \geq m\}$

$\hat{I} = \{(a_1+I, a_2+I, \dots) \mid a_n \in I\} \lhd \hat{R}$

הוכחנו: אם R נתרי, אזי $\hat{R}$ שלם בטופולוגיה ה-$\hat{I}$-אדית.

וגם $\hat{R}/\hat{I}^n \simeq R/I^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

הגדרנו: R חוג חילופי. הרדיקל של ג'ייקובסון של R הוא החיתוך של כל האידאלים המקסימליים.

מסמנים $J(R)$

והוכחנו: יהי $r \in R$. אזי $r \in J(R) \Leftrightarrow 1-rx$ הפיך לכל $x \in R$

טענה:

R חילופי נותרי. $I \lhd R$ אידאל כנ"ל $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)\right)$. אזי $\hat{I} \subseteq J(\hat{R})$

הוכחה:

יהי $r \in \hat{I}$. צריך להוכיח כי $1-\underbrace{rx}_{\in \hat{I}}$ הפיך לכל $x \in \hat{R}$. מספיק להוכיח $1-r$ הפיך לכל $r \in \hat{I}$. הסדרה $1+r,\ 1+r+r^2,\ 1+r+r^2+r^3, \dots$ היא סדרת קושי. $\hat{R}$ שלם $\Leftarrow$ לסדרה יש גבול L.

ולכן

$(1-r)(1+r) = 1-r^2$

$(1-r)(1+r+r^2) = 1-r^3$

$(1-r)(1+r+r^2+r^3) = 1-r^4 \quad \Longrightarrow \quad 1 = (1-r)L$

לכן $1-r$ הפיך

תוצאה:

R חוג חילופי נותרי, $I \lhd R$ אידאל מקסימלי כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$. אז $\hat{I}$ הוא האידאל המקסימלי היחיד של $\hat{R}$. (כלומר, $\hat{I} \lhd \hat{R}$ מקסימלי ואין ל-$\hat{R}$ אידאלים מקסימליים אחרים)

הוכחה:

לפי הטענה מהפעם הקודמת. $\underbrace{R/I}_{\text{שדה כי } I \lhd R \text{ מקסימלי}} \simeq \hat{R}/\hat{I} \Rightarrow \hat{I}$ מקסימלי ב-$\hat{R}$

לפי הטענה הקודמת, $\hat{I} \subseteq J(\hat{R})$. (מצד שני, $J(\hat{R})$ הוא אידיאל אמיתי של $\hat{R}$ ⇐ $\hat{I} = J(\hat{R})$.)

זה אומר כי $\hat{I}$ מוכל בכל אידיאל מקסימלי אחר. $\hat{I}$ מקסימלי ולכן שווה לכל אידיאל מקסימלי אחר.

הגדרה: חוג חילופי R נקרא מקומי אם הוא מקיים את אחד מהתנאים השקולים הבאים:

א) ל-R יש רק אידיאל מקסימלי אחד

ב) לכל $x \in R$, לפחות אחד מהמחוברים $x, 1-x$ הפיך.

ג) אם $x, y \in R$ לא הפיכים, אזי $x+y$ לא הפיך.

ד) אם $x_1 + \dots + x_n$ הפיך, אזי אחד מהמחוברים x_i הפיך

מסקנה:

תחת ההנחות של התוצאה הקודמת $\hat{R}$ הוא חוג מקומי

נוכיח שהתנאים בהגדרה שקולים:

(א) ⇐ (ג): נניח שיש אידיאל מקסימלי יחיד M. יהיו $x, y \in R$ לא הפיכים. אזי האידיאלים xR, yR אמתיים. לפי משפט מתחילת הקורס, כל אידיאל אמיתי מוכל באידיאל מקסימלי. לכן $x \in xR \subseteq M$, כמו כן $y \in M$. לכן $x+y \in M$. לכן $x+y$ לא הפיך

הערה: אם M הוא האידיאל המקסימלי היחיד של R...

(ג) ⇐ (ב): $1 = x + (1-x)$ הפיך, לכן x או $1-x$ הפיך

(ב) ⇐ (א): נניח בשלילה שיש שני אידיאלים מקסימליים שונים M_1, M_2. אזי $M_1 + M_2 = R$. לכן $1 = x+y$ עבור $x \in M_1$, $y \in M_2$ מתאימים. אז $x, y = 1-x$ שניהם לא הפיכים. כי מוכלים באידיאלים מקסימליים. בסתירה ל-(ב).

למה חוגים מקומיים נקראים מקומיים?

דוגמא:

יהי X מרחב טופולוגי. יהי $C(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}$ רציפות $\}$ פונ', זה חוג. $\begin{pmatrix} (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{pmatrix}$

תהי $x \in X$ נקודה. נגדיר יחס שקילות על $C(X,\mathbb{R})$: $f \sim g$ אם קיימת סביבה פתוחה

U של x כך ש $f(u)=g(u)$ לכל $u\in U$.

$R_x = \left\{ \begin{matrix} \text{פונקציות רציפות} \\ f: U_f \to \mathbb{R} \text{ מוגדרות} \\ \text{על סביבה } x\in U_f \end{matrix} \right\} \big/ \sim$

כלומר האיברים של R_x הם מחלקות שקילות. R_x הוא חוג. המחלקות נקראות נבטים (germ) של פונקציות ב-x. החוג R_x הוא מקומי.

$I=\{[f] : f(x_0)=0\} \triangleleft R_{x_0}$ אידאל אמיתי. אם $[f]\notin I$, אזי $f(x_0)\neq 0$

f רציפה $\Leftarrow$ יש סביבה פתוחה $x_0\in U$ של f לא מתאפסת, $|f(x)|\geq c>0$ לכל $u\in U$. אזי $\frac{1}{f}$ מוגדרת ורציפה ב-U $\Leftarrow$ $[f]$ הפיכה. לכן R_{x_0} חוג מקומי.

נחזור להשלמות $\hat{R}=\varprojlim {R}/{I^n}$ כאשר R נתרי, I מקסימלי, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$. אזי $\hat{R}$ חוג מקומי.

נתבונן בשני מקרים פרטיים:

1) $R=F[x]$, כאשר F שדה. יהי $I=(x)$. $I=\left\{\begin{matrix}\text{כל הפולינומים} \\ \text{ללא איבר חופשי}\end{matrix}\right\}$. $R/I \simeq F$ $\Leftarrow$ $I\triangleleft R$ מקסימלי

מהו $\hat{R}$? נשים לב שלכל $n\in\mathbb{N}$ המחלקות ב-$R/I^n = F[x]/(x^n)$ הן:

$\{f=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n F[x] \mid a_1,\ldots,a_{n-1} \text{ נתונים}\}$

האיברים של $\hat{R}$ הם:

$\{f_1+(x), f_2+(x^2), \ldots \mid$ לכל $m\leq n$, m המקדמים הראשונים של f_n שווים לאלה של $f_m\}$

זה אומר שהסדרה הנ"ל מתבררת:

$a_0+(x),\ a_0+a_1x+(x^2),\ a_0+a_1x+a_2x^2+(x^3), \ldots$

לכן האיברים הם טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. לכן $\hat{R}=F[[x]]$.

$\hat{I}=\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_0=0\}$

נבדוק ישירות שאם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \notin \hat{I}$, כלומר $a_0\neq 0$ אזי הטור הפיך. נבנה טור אחר כך ש:

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=1$

נגדיר רקורסיבית את המקדמים b_n.

$a_0b_0=1 \Rightarrow b_0=a_0^{-1}$ (קיים כי המקדמים נמצאים בשדה F)

$a_1b_0+a_0b_1=0 \Rightarrow b_1=-a_0^{-1}a_1b_0$

באינדוקציה: $b_n = -a_0^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k$

לכן כל איבר מחוץ ל- $\hat{I}$ הפיך. לכן $\hat{I}$ הוא האידאל המקסימלי היחיד של $\hat{R}=F[[x]]$

יהי $\alpha=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \hat{R}$ טור חזקות. יהי $\alpha\neq 0$. אזי n מינימלי כך ש $a_n\neq 0$ $(\alpha\notin\hat{I}^n)$. אזי

$$\alpha = x^n\underbrace{(a_n+a_{n+1}x+\dots)}_{\text{הפיך}}$$

זה אומר שניתן להציג כל איבר $\alpha\in\hat{R}=F[[x]]$ בצורה $\alpha=x^n u$ כאשר $n\geq 0$, u הפיך.

טענה:

יהי $J\trianglelefteq F[[x]]$ אידאל לא אפסי. אזי קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש $J=\hat{I}^m=(x^m)$

הוכחה:

לכל $0\neq\alpha\in F[[x]]$ נגדיר $V(\alpha)=\min\{n \mid a_n\neq 0\}$. אם $J\neq(0)$, יהי $m=\min\{V(\alpha)\mid\alpha\in J\}$

נראה כי $\hat{I}^m = J$. אכן:

יש ב- J איבר α עם $V(\alpha)=m$ $\Leftarrow$ $\alpha=x^m u$ עבור u הפיך $\Leftarrow$ $J\supseteq(\alpha)=(x^m)=\hat{I}^m$.

יהי $\alpha\in J$, אזי $\alpha=x^n u$ כאשר u הפיך $n\geq m$ $\alpha=x^m(x^{n-m}u)\in(x^m)$ לכן $J\subseteq\hat{I}^m$

מסקנה:

מבנה האידאלים של $F[[x]]$ הוא פשוט מאוד: $\hat{I}\supsetneq\hat{I}^2\supsetneq\hat{I}^3\supsetneq\dots\supsetneq(0)$

---

2) $R=\mathbb{Z}$, p ראשוני, $I=p\mathbb{Z}$ מקסימלי.

$$\hat{R}=\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_p$$

$\hat{R}$ - החוג של השלמים ה-p-אדיים

האיברים הם לכל $m\leq n$ $\{(a_1+p\mathbb{Z}, a_2+p^2\mathbb{Z},\dots) \mid a_m=a_n \bmod p^m\}$

הוגדר ע"י K. Hensel בשנת 1905

תרגילים:

לכל $0\neq\alpha\in\mathbb{Z}_p$, יהי $V(\alpha)=\min\{n \mid a_n+p^n\mathbb{Z}\neq 0+p^n\mathbb{Z}\}$. אזי $\alpha=p^n u$, u הפיך

לכן האידאלים של $\mathbb{Z}_p$ הם $(p\mathbb{Z}_p\supsetneq p^2\mathbb{Z}_p\supsetneq\dots\supsetneq(0))$

שאלה:

מוטיבציה ל-$\mathbb{Z}_p$? רוצים חוג מקומי, מעין $\mathbb{Z}$. כל חוג $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ מקומי אבל לא ניתן לשכן את $\mathbb{Z}$ בו. אבל ב- $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ניתן לשכן את $\mathbb{Z}$

למה צריך להתעסק בכל כך? ניקח את המיקום $S^{-1}R$ כאשר $R=\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}$

$S^{-1}R = \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p\nmid b$ שברים מצומצמים, $\}$

תרגיל הפשוט:

$S^{-1}R$ מקומי, האידאל המקסימלי היחיד הוא $(\frac{p}{1})$. $\mathbb{Z} \hookrightarrow S^{-1}R$
$n \mapsto \frac{n}{1}$

מצאנו חוג מקומי שמכיל $\mathbb{Z}$, הוא פשוט יותר מ-$\mathbb{Z}_p$. מדוע $\mathbb{Z}_p$ טוב יותר?