אלגברה ליניארית למהנדסים - פתרון תרגיל בית 8

1. חשבו את הדטרמיננטות הבאות:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

פתרון: נפתח לפי השורה האחרונה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = +(-2)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2(3+2) + 3(1-12) = -10 - 33 = -43$$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

פתרון: נפתח לפי העמודה השנייה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2\left[-1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$(6-1) - (-9+4) + (-3+8) - 2\left[-(-6+8) - (2+2)\right] =$$

$$5+5+5-2(-2-4) = 15+12 = 27$$

2. הוכיחו את הטענות הבאות:

2.1. אם ב A יש שורת אפסים אז $\det A = 0$.

הוכחה: נניח כי $R_i(A) = 0$ ונפתח את הדטרמיננטה לפי השורה ה i.

אזי, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0$.

2.2. אם ב A יש שתי שורות זהות אז $\det A = 0$.

הוכחה: נניח כי $R_i(A) = R_j(A)$ עבור $i \neq j$, אזי $\det(A) = \det(B)$ כאשר B המטריצה המתקבלת מ A אחרי פעולת השורה $R_i - R_j$. אבל במטריצה B יש שורת אפסים, לכן, לפי הסעיף הקודם $\det(A) = \det(B) = 0$. מש"ל.

3. חשבו $|A^{123456789}|$ עבור $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$.

פתרון: לפי כפליות הדטרמיננטה,

$$|A^{123456789}|=|A|^{123456789}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}^{123456789}=(1\cdot 3-2\cdot 2)^{123456789}=(-1)^{123456789}=-1$$

4. תהי $A=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&1&0\\\vdots&0&\iddots&0&\vdots\\0&1&\iddots&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(R)$ עבור n זוגי. חשבו את $\det(A)$.

(רמז: הפרידו לשני מקרים).

פתרון: נרצה להגיע למטריצה היחידה באמצעות פעולות שורה.

נשים לב: אם נבצע את ההחלפות של השורות הבאות:

1. השורה הראשונה והשורה ה n (השורה האחרונה)
2. השורה השנייה והשורה ה $n-1$
3. השורה השלישית והשורה ה $n-2$

וכן הלאה, עד החלפת שתי השורות האמצעיות (n זוגי) דהיינו עד החלפת השורה ה $\frac{n}{2}$ והשורה ה $\frac{n}{2}+1$,

נקבל את מטריצת היחידה.

כלומר, אחרי $\frac{n}{2}$ החלפות שורה נקבל את מטריצת היחידה.

לכן,

$$|A|=(-1)^{\frac{n}{2}}|I|=(-1)^{\frac{n}{2}}=\begin{cases}1 & \frac{n}{2}\ \ even\\ -1 & \frac{n}{2}\ \ odd\end{cases}$$

5. תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ ($n\geq 2$), הוכיחו את הטענות הבאות:

5.1 $adjA$ הפיכה אם ורק אם A הפיכה.

הוכחה: ידוע כי $A\cdot adj(A)=|A|I$.

לכן, אם A הפיכה אז $|A|\neq 0$ ו $\left(\frac{1}{|A|}A\right)adjA=I$. לכן $adjA$ הפיכה משמאל ולכן הפיכה.

לכן, מ"ל כי אם A אינה הפיכה אז $adjA$ אינה הפיכה.

נניח כי A אינה הפיכה. אזי, אם $A=0$ אז (כל מינור של A שווה אפס ובפרט) $adjA=0$ ו $adjA$ אינה הפיכה. אחרת, A אינה הפיכה $\Leftarrow$ $|A|=0$. לכן, $A\cdot adj(A)=0$ עבור $A\neq 0$. לכן, $adj(A)$ מחלקת אפס ובפרט אינה הפיכה. מש"ל.

5.2. לכל $\alpha \in F$ $Adj(\alpha A) = \alpha^{n-1} adj(A)$.

הוכחה: ברור כי $Adj(\alpha A), \alpha^{n-1} adj(A) \in M_{n\times n}(F)$. נראה כי לכל $1 \le i, j \le n$

$$(Adj(\alpha A))_{ij} = (\alpha^{n-1} adj(A))_{ij}$$

אבל,

$$(Adj(\alpha A))_{ij} = (cof(\alpha A)^t)_{ij} = (cof(\alpha A))_{ji} = (-1)^{j+i} M_{ji}(\alpha A)$$

כאשר $M_{ji}(\alpha A)$ היא הדטרמיננטה של המטריצה αA אחרי שהורדנו ממנה את השורה ה j והעמודה ה i.

נסמן ב B את המטריצה המתקבלת מ A אחרי הורדת השורה ה j והעמודה ה i. אזי,

$$M_{ji}(\alpha A) = |\alpha B| \underset{B\in M_{n-1\times n-1}(F)}{=} \alpha^{n-1} |B| = \alpha^{n-1} M_{ji}(A)$$

לכן,

$$(Adj(\alpha A))_{ij} = (-1)^{j+i} M_{ji}(\alpha A) = (-1)^{j+i} \alpha^{n-1} M_{ji}(A) = \alpha^{n-1}\left[(-1)^{j+i} M_{ji}(A)\right] = \alpha^{n-1}(cof(A))_{ji}$$
$$= \alpha^{n-1}(cof(A)^t)_{ij} = \alpha^{n-1}(adjA)_{ij}$$

מש"ל.

6. עבור כל A מצאו את המטריצה המצורפת $adjA$. קבעו בעזרתה אם A הפיכה. אם כן, מצאו את המטריצה ההופכית.

6.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

פתרון: נמצא את מטריצת הקופקטורים

$$cof(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המצורפת היא,

$$adj(A) = cof(A)^t = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

נחשב $A \cdot adj(A)$ (למעשה, על מנת לקבוע אם A הפיכה מספיק לחשב את האיבר במקום ה $1,1$ במטריצת המכפלה – כלומר לכפול את השורה הראשונה ב A בעמודה הראשונה של $adjA$)

נקבל,

$$A\cdot adj(A)=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

לכן, A הפיכה, $(|A|=1)$ ו $A^{-1}=adj(A)=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$

6.2. $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}$

פתרון: נמצא את מטריצת הקופקטורים

$$cof(A)=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2&3\\-1&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-2\\3&-1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2&3\\1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-7&-5\\1&-7&-5\\-1&7&5\end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המצורפת היא,

$$adj(A)=cof(A)^t=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-7&-7&7\\-5&-5&5\end{pmatrix}$$

נחשב את האיבר במקום ה $1,1$ במטריצת $A\cdot adj(A)$ באמצעות כפילת השורה הראשונה ב A בעמודה הראשונה של $adjA$.

נקבל,

$$|A|=\left(A\cdot adj(A)\right)_{11}=\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-7\\-5\end{pmatrix}=1+14-15=0$$

מכיוון ש $|A|=0$, A אינה הפיכה.

שאלה 7

(א)

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 7\cdot 2 = 1$$

(ב)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 7R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 4R_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 3\cdot 12 - 6\cdot 6 = 0$$

אפשר גם לראות
ששורה השנייה והשלישית,
תלויות לינארית ולכן הדטרמיננטה היא אפס.

(ג)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי שורה שניה}}{=} -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי שורה ראשונה}}{=} -4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4 \cdot 1 =$$

שאלה 8

נחשב את

$$\det\begin{pmatrix} t & 2t-3 & 2t-1 \\ t & 3 & 7-2t \\ t & t & 3 \end{pmatrix}.$$

נסמן ב- A מטריצה זו.

$$|A| \underset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}}{=} \begin{vmatrix} t & 2t-3 & 2t-1 \\ 0 & -2t+6 & -4t+8 \\ 0 & -t+3 & -2t+4 \end{vmatrix} = 0$$

לכל t, שתי השורות R_2, R_3 תלויות

לפיכך A אינה הפיכה.

כי קיבלנו $\det A = 0$.

שאלה 9

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ראשית נחשב את

נפתח לפי העמודה השלישית ונקבל:

$$\det A = 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי שורה ראשונה}}{=} 2(-1)\left(1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = -2(2) = -4$$

ולכן אם נסמן הפתרון כ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = -4|A_i|$$

נחשב את ה-$|A_i|$ השונים

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{III}}{\overset{\text{פיתוח עמודה}}{=}} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{III עמודה}}{\overset{\text{פיתוח}}{=}} -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{I}}{\overset{\text{שורה}}{=}} -2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -2\left(2-(-1)\right) = -6$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{I}}{\overset{\text{שורה}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 6 + (-8) = -2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{III}}{\overset{\text{עמודה}}{=}} (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{I}}{\overset{\text{שורה}}{=}} -2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -2\left(2+(-7)\right) = 10$$

ולכן הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ 8 \\ -40 \end{pmatrix}$$

שאלה 10

נשתמש בפרק ב-

$$|A|A^{-1} = adjA$$

נחשב את המינורים השונים

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

ולכן

$$adjA = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ו-

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{שורה } I}{=} 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

ולכן:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$