1. הוכיחו את אי שוויון בסל: יהי V ממ"פ, תהי $\{x_1,...,x_n\}$ **קבוצה** אורתונורמלית ויהי x וקטור כלשהו, אז

$$\sum\left|\langle x,x_i\rangle\right|^2\le\|x\|^2$$

$$\begin{aligned}0 &\leqq \left\|x-\sum_1^r(x,x_j)x_j\right\|^2\\ &= \left(x-\sum_1^r(x,x_i)x_i,\, x-\sum_1^r(x,x_j)x_j\right)\\ &= (x,x)-\sum_i(x,x_i)(x_i,x)-\sum_j(x_j,x)(x,x_j)\\ &\quad+\sum_i\sum_j(x,x_i)(x,x_j)(x_i,x_j)\\ &= \|x\|^2-\sum_i|(x,x_i)|^2-\sum_i|(x,x_i)|^2+\sum_i|(x,x_i)|^2.\end{aligned}$$

המסקנה תתקבל ע"י העברת אגף.

2. השתמשו באי שוויון בסל כדי להוכיח את אי שוויון שוורץ: לכל $x,y\in V$,

$$\left|\langle x,y\rangle\right|\le\|x\|\|y\|$$

נשים לב שהקבוצה $\{y\}$ היא אורתוגונלית (זה נכון לכל קבוצה בת וקטור יחיד שאינו וקטור האפס). לכן $\left\{\frac{y}{\|y\|}\right\}$ אורתונורמלית.

נשתמש בא"ש בסל עבור הקבוצה $\left\{\frac{y}{\|y\|}\right\}$ והוקטור x ונקבל:

$$\left|\left\langle x,\frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right|^2\le\|x\|^2$$

כעת, $\left\langle x,\frac{y}{\|y\|}\right\rangle=\overline{\left\langle \frac{y}{\|y\|},x\right\rangle}=\frac{1}{\|y\|}\overline{\langle y,x\rangle}=\frac{1}{\|y\|}\langle x,y\rangle$ ולכן נקבל מאי השוויון הנ"ל את אי שוויון שוורץ (אחרי כפל ב $\|y\|^2$).

3. מתי מתקיים **השוויון** של שוורץ? כלומר, עבור אילו וקטורים x,y נכון השוויון $|\langle x,y\rangle|=\|x\|\|y\|$? רמז: הוכיחו שהשוויון מתקיים אםם הוקטורים תלויים לינארית. רמז 2: הסתכלו על $\|\gamma x-\alpha y\|$ כאשר $\gamma\in C$ הוא כזה כך ש $\langle\gamma x,y\rangle\in R$ וכן $|\gamma|=1$ (עליכם להסביר למה קיים γ כזה).

כיוון אחד: נניח שהשוויון מתקיים וניקח $\gamma=\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$. אז:

$$
\begin{aligned}
&\|\gamma x-\alpha y\|^2=\|\gamma x\|^2-\langle\gamma x,\alpha y\rangle-\langle\alpha y,\gamma x\rangle+\|\alpha y\|^2=\\
&=\|\gamma x\|^2-\langle\gamma x,\alpha y\rangle-\overline{\langle\gamma x,\alpha y\rangle}+\|\alpha y\|^2=\\
&=\|\gamma x\|^2-2\langle\gamma x,\alpha y\rangle+\|\alpha y\|^2=\\
&=\left(\|\gamma x\|-|\alpha|\|y\|\right)^2
\end{aligned}
$$

כעת נבחר $\alpha=\frac{\|\gamma x\|}{\|y\|}$ ונקבל $\|\gamma x-\alpha y\|=0$, כלומר $\gamma x-\alpha y=0$ ומכאן שהוקטורים ת"ל.

הכיוון השני מיידי.

4.

<u>הגדרה:</u> מטריצה A תקרא אוניטרית אם היא מקיימת $AA^t=I$ $(AA^*=)$.

4.13 תרגיל. א. יהיו E,F בסיסים אורתונורמלים עבור מרחב וקטורי V. הוכח שהמטריצה $P=[I]_F^E$ היא אוניטרית.

ב. תהא $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אוניטרית. הוכח שקיים בסיס אורתונורמלי B כך ש $P=[I]_S^B$ (כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^n$).

תשובה

א. נניח כי $B=\{v_1,...,v_n\}$, $F=\{w_1,...,w_n\}$ מכיוון ש F בא"נ, לכל $v_i\in E$ מתקיים $[v_i]_F=\begin{bmatrix}\langle v_i,w_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v_i,w_n\rangle\end{bmatrix}$ ולכן

$$P=[I]_F^E=\left([v_1]_F\ \dots\ [v_n]_F\right)=\begin{pmatrix}\langle v_1,w_1\rangle & \cdots & \langle v_n,w_1\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_1,w_n\rangle & \cdots & \langle v_n,w_n\rangle\end{pmatrix}.$$

כעת נניח כי $PP^*=\langle b_{ij}\rangle_{n\times n}$, נסתכל על הרכיב בעמודה ה j והשורה ה i של PP^* , ונפריד למקרים:

1. $i=j$: אז לפי משפט פרסבל:

$$b_{ij}=b_{ii}=\sum_{k=1}^{n}\langle v_k,w_i\rangle\overline{\langle v_k,w_i\rangle}=\sum_{k=1}^{n}\left|\langle v_k,w_i\rangle\right|^2=\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{\langle w_i,v_k\rangle}\right|^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\langle w_i,v_k\rangle\right|^2=\|w_i\|^2=1$$

2. $i\neq j$: אז לפי משפט פרסבל המוכלל:

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\langle v_k,w_i\rangle\overline{\langle v_k,w_j\rangle}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle w_i,v_k\rangle}\langle w_j,v_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle w_j,v_k\rangle\overline{\langle w_i,v_k\rangle}$$
$$=\langle w_j,w_i\rangle=0$$

לסיכום: $PP^*=\langle b_{ij}\rangle_{n\times n}=I$.

ב. תהא $P\in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה אוניטרית. צ"ל שקיים בא"ן B כך ש-

$P=[I]^B_S$ (כאשר S הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^n$)

<u>הוכחה:</u> נסמן $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V

$$P=[I]^B_S=\left(\begin{bmatrix}|\\v_1\\|\end{bmatrix}_S \begin{bmatrix}|\\v_2\\|\end{bmatrix}_S \cdots \begin{bmatrix}|\\v_n\\|\end{bmatrix}_S\right)$$

שהרי S הוא הבסיס הסטנדרטי!

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}|&|&&|\\v_1&v_2&\cdots&v_n\\|&|&&|\end{pmatrix}}_{\text{כאשר}} \Longrightarrow \bar{P}^t=\begin{pmatrix}-\bar{v}_1-\\-\bar{v}_2-\\\vdots\\-\bar{v}_n-\end{pmatrix}$$

כאשר $v_1\dots v_n$ וקטורי עמודה

כאשר $\bar{v}_1\dots\bar{v}_n$ וקטורי שורה

$$\Longrightarrow\left((\bar{P})^t\cdot P\right)^t=P^t\cdot\bar{P}=\left[\begin{pmatrix}v_1^t & \cdots & v_n^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|&&|\\\bar{v}_1&\cdots&\bar{v}_n\\|&&|\end{pmatrix}\right]^t=I$$

נתון P אוניטרית

המטריצה שבמקום (i,j) זה האיבר ע"י כפל שורה עמודה

$$\begin{cases}v_i^t\cdot\bar{v}_i & i=j\\ v_i^t\cdot\bar{v}_j & i\neq j\end{cases}=I\Longrightarrow\begin{cases}\langle v_i,v_j\rangle & i=j\\ \langle v_i,v_j\rangle & i\neq j\end{cases}=\underbrace{\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}}_{I}$$

כלומר קיבלנו שלכל $1\le i\le n$ מתקיים

$$\begin{cases}\langle v_i,v_j\rangle=1 & i=j\\ \langle v_i,v_j\rangle=0 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר כל שני וקטורים ב-B (שהם שונים) מאונכים

ואורך כל וקטור ב-B $=1$ $\Longleftarrow$ הם קבוצה א"נ.

בנוסף B בסיס ל-V

B בא"ן שאכן מקיים

$P=[I]^B_S$ אוניטרית.

.5

4.13 תרגיל. מצא בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$. [**רמז**: תרגיל קודם]

[illegible]

צריך למצוא בא"נ ל-$\mathbb{R}_2[x]$ עם המ"פ

$\langle a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$.

אם כן,

ניקח את הבסיס הסטנדרטי ל-$\mathbb{R}_2[x]$ ונפעיל עליו את תהליך גרם שמידט. $B=\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}\}$ ונמצא

בסיס א"נ $\{w_1', w_2', w_3'\}$

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} = x - \frac{\overbrace{\langle x, 1\rangle}^{0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0=0}}{\|1\|^2} = x$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} = x^2 - \frac{\overbrace{\langle x^2, 1\rangle}^{\overset{0}{0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0}}}{\|1\|^2} - \frac{\overbrace{\langle x^2, x\rangle}^{\overset{0}{1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0}}}{\|x\|^2} = x^2$$

$$w_1' = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\underbrace{\|1\|}_{\sqrt{1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$w_2' = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{1} = x$$

$$\langle x, x\rangle = \sqrt{0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0} = 1$$

$$w_3' = \frac{x^2}{\|x^2\|} = \frac{x^2}{1} = x^2$$

$$\|x^2\| = \sqrt{0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1} = 1$$

$\Longrightarrow$ $\{w_1', w_2', w_3'\} = \{1, x, x^2\}$ בא"נ ל-$\mathbb{R}_2[x]$ עם המ"פ הנ"ל.

.6

יהי $\mathbb{R}_3[x]$ ממ"פ עם בסיס $\{1, x, x^2\}$. בנה בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}_3[x]$ ע"י תהליך גראם-שמידט כאשר המכפלה הפנימית מוגדרת:

א. $\langle p_1, p_2\rangle = 3a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2$ (כאשר $p_i = a_ix^2 + b_ix + c_i$).

ב. $\langle p_1, p_2\rangle = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$

ג. $\langle p_1, p_2\rangle = 3a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2$ (כאשר $p_i = a_i + b_i x + c_i x^2$)

נסמן הבסיס הא״נ $B = \{v_1', v_2', v_3'\}$ ונמצא אותו.

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x - \frac{\overbrace{\langle x, 1\rangle}^{3\cdot 0\cdot 1+2\cdot 1\cdot 0+0\cdot 0=0}}{\underbrace{\|1\|^2}_{\langle 1,1\rangle = 3\cdot 1\cdot 1+2\cdot 0\cdot 0+0\cdot 0=3}}\cdot 1 = x - \frac{0}{3} = x$$

$$v_3 = x^2 - \frac{\overbrace{\langle x^2, x\rangle}^{3\cdot 0\cdot 0+2\cdot 0\cdot 1+0\cdot 0=0}}{\underbrace{\|x\|^2}_{\langle x,x\rangle = 3\cdot 0+2\cdot 1\cdot 1+0=2}}\cdot x - \frac{\overbrace{\langle x^2, 1\rangle}^{3\cdot 1\cdot 0+2\cdot 0\cdot 0+0\cdot 1=0}}{\underbrace{\|1\|^2}_{\text{כבר מצאנו } =3}}\cdot 1 = x^2 - \frac{0}{2} - \frac{0}{3} = x^2$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$v_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{x^2}{\underbrace{\|x\|}_{\sqrt{\langle x^2,x^2\rangle} = \sqrt{3\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 1} = \sqrt{1} = 1}} = \frac{x^2}{1} = x^2$$

בא״נ ל-$R_2[x]$ הוא

$$B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, x^2\right\}$$

ב. $\langle p_1, p_2\rangle = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)\,dx$

נסמן הבא״נ $B = \{v_1', v_2', v_3'\}$ ונמצא אותו.

(כאשר נתון ש- $\{1, x, x^2\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}_2[x]$)

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x - \frac{\overbrace{\langle x, 1\rangle}^{\int_0^1 x\cdot 1\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}}}{\underbrace{\|1\|^2}_{\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\,dx = x\Big]_0^1 = 1}} = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} = x - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x^2\cdot x\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$v_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\underbrace{\|1\|^2}_{\text{כבר מצאנו } 1=}} - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\underbrace{\|x\|^2}_{\langle x,x\rangle = \int_0^1 x\cdot x\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}}} = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = x^2 - \frac{13}{12}$$

חסר הכפול בוקטור

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\underbrace{\|1\|}} = \frac{1}{1} = 1$$

כבר מצאנו $\|1\| = \sqrt{1} = 1$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{x-\frac{1}{2}}{\|\underbrace{x-\tfrac{1}{2}}\|}$$

$$\sqrt{\langle x-\tfrac{1}{2}, x-\tfrac{1}{2}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^2 dx} = \sqrt{\frac{(x-\frac{1}{2})^3}{3}\Big]_0^1} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{3}} = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$\Longrightarrow v_2' = \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{12}}}} = \sqrt{12}\cdot(x-\tfrac{1}{2})$$

$$v_3' = \frac{x^2-\frac{13}{12}}{\|\underbrace{x^2-\tfrac{13}{12}}\|}$$

$$\sqrt{\langle x^2-\tfrac{13}{12}, x^2-\tfrac{13}{12}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x^2-\tfrac{13}{12})^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 x^4 - 2\cdot\tfrac{13}{12}x^2 + (\tfrac{13}{12})^2 dx}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{x^5}{5} - \frac{13}{6}\cdot\frac{x^3}{3} + (\tfrac{13}{12})^2 x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{13}{18} + \frac{13^2}{12^2}} = \sqrt{\frac{469}{720}}$$

$$\Longrightarrow v_3' = \frac{x^2-\frac{13}{12}}{\sqrt{\frac{469}{720}}} = \sqrt{\frac{720}{469}}\left(x^2-\tfrac{13}{12}\right)$$

$$\Longrightarrow B = \left\{1, \sqrt{12}(x-\tfrac{1}{3}), \sqrt{\frac{720}{469}}\left(x^2-\tfrac{13}{12}\right)\right\}$$

7.

4.26 תרגיל. יהא $B=\{(i,i,0),(0,i,i),(i,0,i)\}$ בסיס עבור $\mathbb{C}^3$. מצא בסיס אורתונורמלי (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית) $B'=\{v_1', v_2', v_3'\}$, כך שמתקיים $\text{span}(v_1)=\text{span}(v_1')$ וכן $\text{span}(v_1,v_2)=\text{span}(v_1',v_2')$.

<u>פתרון:</u>

לפי משפט בכיתה כאשר מוצאים בא"ן ע"י תהליך $\{v'_1 ... v'_n\}$

ג"ש אז $sp\{v_1 .. v_k\} = sp\{v'_1 .. v'_k\}$ לכל $1 \le k \le n$

(כאשר $\{v_1 -- v_n\}$ הבסיס שעליו הפעלנו את התהליך)

ולכן נמצא את הבא"ן הדרוש ע"י הפעלת

ג"ש על הבסיס הנתון. אם כן,

(w_i $1 \le i \le 3$ הם v'_1, v'_2, v'_3 לפני הנרמול)

$$w_1 = v_1 = (i, i, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|} = (0,i,i) - \frac{\overbrace{\langle (0,i,i),(i,i,0)\rangle}^{0\cdot(-i)+i(-i)+i\cdot 0=1}}{\underbrace{\|(i,i,0)\|^2}_{i\cdot(-i)+i(-i)+0\cdot 0=2}}\begin{pmatrix} i \\ i \\ 0\end{pmatrix} = (0,i,i) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ i \\ 0\end{pmatrix} = \left(-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, i\right)$$

$$w_3 = (i,0,i) - \frac{\overbrace{\langle (i,0,i),(i,i,0)\rangle}^{-1+0=+1}}{\underbrace{\|(i,i,0)\|^2}_{\text{חישבנו כבר } =2}}\begin{pmatrix} i \\ i \\ 0\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\langle (i,0,i),(0,i,i)\rangle}^{0+0+1}}{\underbrace{\|(0,i,i)\|^2}_{0\cdot 0+i(-i)+i(-i)=2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i\end{pmatrix} = (i,0,i) - \left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 0\right) - \left(0, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{i}{2}, -i, \frac{i}{2}\right)$$

$$v'_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(i,i,0)}{\underbrace{\|(i,i,0)\|}_{\sqrt{2}}} = \frac{(i,i,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$v'_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, i\right)}{\underbrace{\|(\;\;)\|}_{\sqrt{\underbrace{-\frac{i}{2}\cdot\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)}_{1} + \underbrace{i(-i)}_{1}} = \sqrt{2}}} = \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}}, \frac{i}{2\sqrt{2}}, i\right)$$

v_3