

מבנים אלגבריים תשע"ה - תרגיל 5

1. קבעו (והוכיחו את קביעתכם) אם הפונקציות הבאות הן הומומורפיזם או לא.

(א) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = 5x$.

(ב) $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ המוגדרת ע"י $f(x) = 5x$.

(ג) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ המוגדרת ע"י $f(a) = a \pmod n$.

(ד) $f : G \times H \rightarrow H \times G$, תבורות G, H , המוגדרת ע"י $f(g, h) = (h, g)$.

(ה) עבור חבורה G ואיבר $a \in G$, $f : G \rightarrow G$ המוגדרת ע"י $f(g) = x^{-1}gx$.

(ו) עבור חבורה כלשהי G , $f : G \rightarrow G$ המוגדרת ע"י $f(g) = g^{-1}$.

2. הוכח כי סעיף ד' הוא איזומורפיזם, ושסעיף ג' הוא אפימורפיזם.

3. הוכיחו שאם $\varphi : G \rightarrow H$ ו- $K \leq G$ אזי $\varphi(K) \leq H$. הסיקו כי $\text{Im} \varphi \leq H$.

4. הוכיחו שאם $\varphi : G \rightarrow H$ הוא איזומורפיזם אזי $K \triangleleft G \Leftrightarrow \varphi(K) \triangleleft H$.

5. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) קיים מונומורפיזם $GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{16}$

(ב) קיים אפימורפיזם $\mathbb{R}^* \leq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^*$ (רמז: השתמשו בערך מוחלט).

(ג) קיים איזומורפיזם $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \leq \mathbb{R}^*$ (רמז: השתמשו באקספוננט).

(ד) קיים איזומורפיזם $D_5 \rightarrow \Omega_{10}$

6. תארו את הקוסטים השמאליים עבור החבורות ותתי החבורות הבאות:

(א) $G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z}$

(ב) $G = \mathbb{R}^2, H = \mathbb{R} \times \{0\}$

(ג) $G = \Omega_{15} = \langle \omega \rangle, H = \langle \omega^5 \rangle$

(ד) $G = U_{30}, H = \{1, 11\}$

7. הוכיחו שמנה של חבורה אבלית היא אבלית. כלומר: אם G חבורה אבלית ו- $H \triangleleft G$ אזי חבורת המנה G/H היא אבלית.