פתרון בוחן תיכוניסטים

12 במאי 2015

1. נשתמש בנוסחה:

$$\int\limits_C f dS = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

במקרה שלנו $f(x,y) = \frac{1}{x+1}$, $\gamma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$ ולכן:

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{1+t}, \gamma'(t) = (1, \sqrt{t}), \left\|\gamma'(t)\right\| = \sqrt{1+t}$$

ואם כן:

$$\int\limits_C \frac{1}{1+x} dS = \int\limits_0^3 \frac{1}{1+t}\sqrt{1+t}dt = 2 \cdot \sqrt{t+1}|_0^3 = 2$$

2. מה בכלל ההבדל בין שני המקרים?

א. כאשר המסילה לא מקיפה את ראשית הצירים, התבנית גזירה ברציפות בכל התחום ולכן תנאי משפט גרין מתקיימים, וממשפט גרין האינטגרל יהיה 0.

ב. כאשר המסילה מקיפה את ראשית הצירים, לא נוכל להשתמש ישירות במשפט גרין, מכיוון שהתבנית לא גזירה ברציפות בכל התחום.

מה נעשה?

נקיף את הראשית במסילה סגורה ופשוטה קטנה מספיק, שהיא מעגל ושתהיה מוקפת כולה ע"י המסילה שלנו (חשבו למה אפשר לעשות זאת. אפשר להתבונן על המרחק של המסילה שלנו מהראשית כפונקציה. זו פונקציה רציפה ויש לה מינימום. ניקח מסילה פשוטה וסגורה שתקיף את הראשית ומרחקה מהראשית קטן מהמינימום של פונקציית המרחק של המסילה שלנו מהראשית).

כעת, נתבונן בתחום שנמצא בין המסילה שלנו לבין המסילה הקטנה שבנינו.

תחום זה הוא מה שקראנו לו תחום גרין, ולכן אפשר להשתמש במשפט גרין.

נסמן את המסילה הקטנה שלנו ב־C_r, מעגל עם רדיוס r.
השדה הוקטורי שלנו הוא:

$$(P,Q)=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$$

ולכן:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

ולכן משפט גרין האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy-\int\limits_{C_r} -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\iint\limits_D 0dxdy=0$$

כלומר:

$$\int\limits_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int\limits_{C_r} -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

המסילה הקטנה היא מעגל עם הפרמטריזציה הרגילה: $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t),t\in[0,2\pi]$. אם כן:

$$\gamma'(t)=(-r\sin t,r\cos t)$$

$$(P,Q)=(-\frac{r\sin t}{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t},\frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t})=(-\frac{\sin t}{r},\frac{\cos t}{r})$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא:

$$\int\limits_{C_r} -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int\limits_0^{2\pi}(-\frac{\sin t}{r},\frac{\cos t}{r})\cdot(-r\sin t,r\cos t)dt=\int\limits_0^{2\pi}1dt=2\pi$$

וגם האינטגרל שלנו שווה ל־2π.
3. פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t)=(t,t^3),t\in[0,1]$$

ולכן:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = \int\limits_0^1 (\sqrt{t}, \sqrt{t^3}) \cdot (1, 3t^2) dt = \int\limits_0^1 (\sqrt{t} + 3t^{\frac{7}{2}}) dt = (\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{2}{9} t^{\frac{9}{2}})|_0^1 = \frac{4}{3}$$

בונוס:

פרמטריזציה של העקומה שלנו היא:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ולכן:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\frac{\pi}{2}$$