חשבון אינפינטסימלי 2 (88133)

חישובים וקירובים באמצעות טיילור-מקלורן

יונתן סמידוברסקי

מתוך הרצאות ותקציר הקורס של פרופ' צבאן, מצורפות גם דוגאות לשימושים ויישומים

משפט טיילור-מקלורן

משפט:

1) נניח ש$f^{(n)}(0)$ קיימת. אזי:

(א) קיימת הצגה יחידה $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n+r(x)$ כך ש$lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=0$

(ב) בהצגה זו, $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ לכל k, כלומר:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r(x)=\sum_{k=0}^{n}[\frac{f^{(k)}(0)}{k!}]+r(x)$$

משפט:

2) **שארית לגראנז'**: נניח ש$f^{(n)}(0)$ קיימת ורציפה ב$[0,b]$, וכן גזירה ב$(0,b)$. לכל $0<x<b$ יש $0<c_x<x$ כך ש

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{r(x)}$$

בדומה עבור סביבה שמאלית של 0 וסביבה מנוקבת.

משפט:

3) **קירוב טיילור מקלורן בנקודה כללית**: הכללה לפיתוח סביב a כללית:

(א) אם $f^{(n)}(a)$ קיימת, אז $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r(x)$

ומתקיים $lim_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^n}=0$. יתר על כן, הצגה זו יחידה

(ב) אם $f^{(n)}$ קיימת ורציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b) אז לכל $a<x<b$ יש $a<c_x<x$ כך שמתקיים

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{r(x)}$$

בדומה עבור סביבה שמאלית וסביבה מנוקבת

* הפיתוח סביב $x_0=0$ נקרא **פיתוח מקלורן**, ובמקרה הכללי נקרא **פיתוח טיילור**

הוכחה

(א1) נניח בשלילה שישנן שתי הצגות

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + \widetilde{r(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + r(x)$$

כעת ידוע כי $lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{r(x)}}{x^n} = 0, lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n} = 0$
בפרט לכל $k = 0, ..., n$ מתקיים כי

$$\frac{r(x)}{x^k} = \frac{r(x)}{x^n} \cdot x^{n-k}$$

אבל בשאיפה לאפס ראינו שצד שמאל שואף לאפס, ולגבי צד שני

$$lim_{x\to 0}x^{n-k} = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

ומחשבון גבולות בכל מקרה לכל k כזה מתקיים $lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^k} = 0$ ובאותו האופן $lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{r(x)}}{x^k} = 0$.
כעת, נחזור למשוואה המקורית ונשאיף $x \to 0$

$$lim_{x\to 0}[b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + \widetilde{r(x)}] = lim_{x\to 0}[a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + r(x)]$$

כל האיברים מלבד האיבר החופשי שואפים לאפס (במקרה של $r(x)$ או $\widetilde{r(x)}$ זה שקול לביטוי $\frac{r(x)}{x^0}$ או $\frac{\widetilde{r(x)}}{x^0}$ אשר ראינו כי שואף לאפס) נשארנו עם

$$b_0 = a_0$$

אז נציב במשוואה המקורית ונחסר משני הצדדים לקבלת

$$b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n + \widetilde{r(x)} = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + r(x)$$

נחלק בx ונקבל

$$b_1 + b_2x + ... + b_nx^{n-1} + \frac{\widetilde{r(x)}}{x} = a_1 + a_1x + ... + a_nx^{n-1} + \frac{r(x)}{x}$$

שוב, משאיפים $x \to 0$ ומטענת העזר כל המחוברים מלבד האיברים החופשים יתאפסו, נקבל

$$b_1 = a_1$$

ממשיכים כך עם חיסורים וחילוק בx עד שמקבלים

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = b_n$$

ומהמשוואה המקורית קיבלנו גם $\widetilde{r(x)} = r(x)$. וסיימנו.

$$\blacksquare$$

1ב) נותר להוכיח קיום

ניקח $r(x) := f(x) - \underbrace{p(x)}_{f(0)+f^{(1)}(0)\cdot x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n}$

יש להוכיח $lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=0$:

עבור $k=0,1,...,n$ מקבלים (מלמה מההרצאה)

$$r^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)-\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot k!=0$$

נפעיל את כלל לופיטל $n-1$ פעמים:

הפונקציה $r^{(k)}(x)$ גזירה ב-0 לכל $k=0,1,...,n-1$

בפרט הפונקציה רציפה ב0 ולכן

$$lim_{x\to 0}r^{(k)}(0)=r^{(k)}(0)=0$$

כעת, אפשר להפעיל לופיטל כפי שרצינו

$$lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{r(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^n}_{\to 0}}=lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{r'(x)}^{\to 0}}{\underbrace{nx^{n-1}}_{\to 0}}=...=lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\cdot x}=\frac{1}{n!}\cdot lin_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{x}$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot lin_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(0)}{x-0}=\frac{1}{n!}\left[r^{(n-1)}\right]'(0)=\frac{1}{n!}\cdot r^{(n)}(0)=0$$

וסיימנו.

■

(2) יהי $x \in (0,b)$ קבוע
לכל $t \in (0,b)$ נגדיר פונקציה באופן הבא

$$q(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

נסמן $u(t) := (x-t)^{n+1}$
ובעבור שניהם, הצבה של x תיתן $q(x) = 0 = u(x)$
(לשים לב שהפונקציה מקבלת ערכים לפי t ו-x הוא קבוע נתון)
כעת

$$\frac{r(x)}{x^{n+1}} = \frac{q(0)}{x^{n+1}} = \frac{q(0) - \overbrace{q(x)}^{0}}{\underbrace{u(0)}_{x^{n+1}} - \underbrace{u(x)}_{0}}$$

כעת ממשפט ערך הממוצע המוכלל קיים $0 < c_x < x$ כך ש

$$\frac{q(0)-q(x)}{u(0)-u(x)} = \frac{q'(c_x)}{u'(c_x)}$$

נמשיך לפתח את $\frac{q'(c_x)}{u'(c_x)}$ ולבסוף נשווה ל-$\frac{r(x)}{x^{n+1}}$. ראשית,

$$u'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1)$$

(הגזירה נעשית לפי t!)
ובנוסף,

$$q'(t) \quad = \quad \overbrace{[\cancel{f(x)}]'}^{0(constant)} \quad - [\cancel{f'(t)} + \left(\cancel{f''(t)(x-t) - f'(t)}\right) + \left(\cancel{\frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2 - 2(x-t)\frac{f''(t)}{2}}\right)$$

$$+ ... + \left(\cancel{\frac{f^{(n)}}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - (n-1)(x-t)^{n-2}\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}}\right) + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \cancel{n(x-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t)}{n!}}\right)]$$

ולאחר צמצום מקבלים

$$q'(t) = -[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n]$$

ולסיכום, אם נציב בשניהם c_x נקבל:

$$\frac{r(x)}{x^{n+1}}=\frac{q'(c_x)}{u'(c_x)}=\frac{-[\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x-c_x)^n]}{-(n+1)(x-c_x)^n}=\frac{\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}}{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

ולסיום,

$$r(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

■

(3) תהי $g(t):=f(a+t)$

$g'(t)=f'(a+t)\cdot(a+t)'=f'(a+t)$

$\vdots$

$g^{(n)}(t)=f^{(n)}(a+t)$

מהמשפט הקודם,

$$f(x)=f(a+t)=g(t)=g(0)+g'(0)\cdot t+...+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n+r(x)$$

$$\underset{\substack{x:=a+t\\ t=x-a}}{=}f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+\widetilde{r(x)}$$

כאשר $\widetilde{r(x)}=r(x-a)$

ומתקיים כי

$$\frac{\widetilde{r(x)}}{(x-a)^n}=\frac{r(x-a)}{(x-a)^n}=\frac{r(t)}{t^n}\underset{\substack{t\to 0\\ x\to a}}{\to}0$$

והסעיף השני דומה.

■

דוגמאות לשימושים

(א) $sin(x)$ (טור מקלורן)

נרצה למצוא קירוב של ערכי הפונקציה סינוס $sin(x)$, נגדיר $f(x) = sin(x)$

$$f^{(0)}(x) = sin(x) \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = cos(x) \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -sin(x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

ומתקיימת מחזוריות לכן בעצם

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ (-1)^m & n = 2m+1 \end{cases}$$

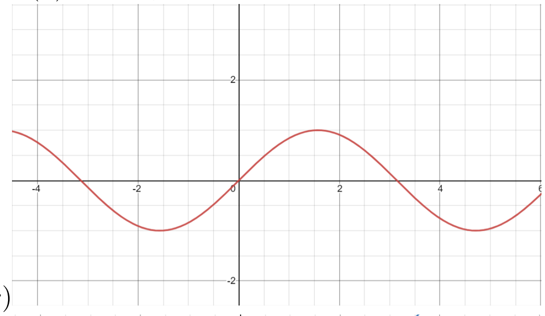
נציב בנוסחת טיילור- מקלורן לקבלת

$$f(x) \approx 0 + x + 0 + \frac{(-1)}{6}x^2 + 0 + \frac{x^5}{120} + r(x)$$

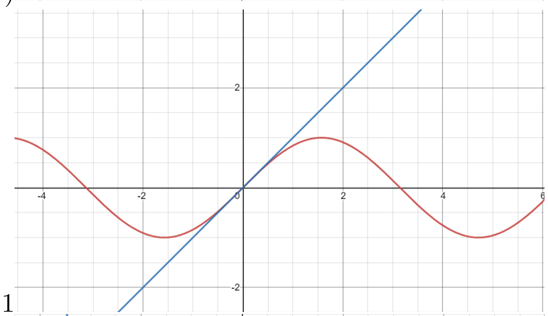
אפשר לקחת כמה רמת דיוק שנרצה, ו$r(x)$ מבטא את השגיאה. כלומר

$$T_{sinx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2m+1)!} x^{2m+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

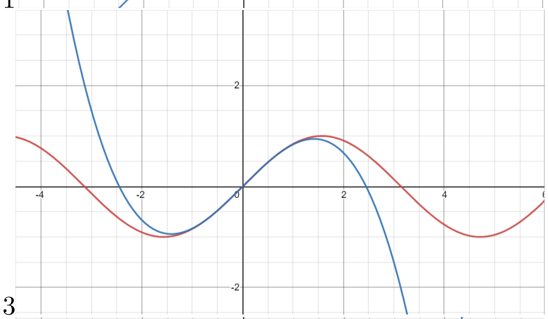
המשמעות הגרפית מבחינת רמת הדיוק ביחס ל$sin(x)$:



$sin(x)$

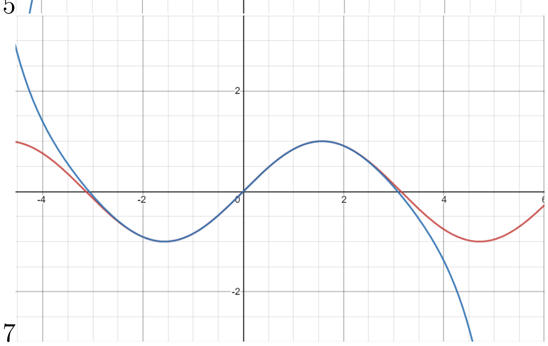


$n=1$



$n=3$

$n=5$



$n=7$

(ב) $cos(x)$ (טור מקלורן)

באופן דומה, נקבל $T_{cosx}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(ג) $ln(x+1)$ (טור מקלורן)

נגדיר $f(x) := ln(x+1)$

$$f^{(0)}(x) = ln(x+1) \Rightarrow f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6$$

נשים לב שלכל $n \geq 1$ מתקיים $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ וסך הכל

$$T_{ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1}$$

(ד) e^x (קירוב עם רמת דיוק מתאימה)

דוגמה מההרצאה, ניקח את $f(x) := e^x$, לכל n מתקיים כי $f^{(n)}(x) = e^x$ ולכן $f^{(n)}(0) = 1$
(ניעזר בשארית לגראנז') סך הכל נקבל, לכל $x > 0$ קיימת $0 < c < x$ כך ש

$$e^x = \overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!}} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

למשל, נרצה לחשב את e ברמת דיוק של 0.001, נבדוק כמה ספרות צריך לקחת

$$|r| = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

אבל $0 < c < 1$, ולכן

$$|r_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

נרצה $|r_n(x)| < 0.001$ כלומר $\frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{1000}$
נקבל $3000 \leq (n+1)!$
נקבל שהמס' הקטן ביותר שאפשר להציב (בכל זאת, נרצה חישוב יחסית פשוט) הוא $n = 6$
כלומר

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2.718055555...$$

(ה) קירוב של $sin(\frac{\pi}{2}+1)$

דוגמה מההרצאה, $x=\frac{\pi}{2}+1, a=\frac{\pi}{2}$ ולכן $x-a=1$

$$sin(\frac{\pi}{2}+1)=sin(\frac{\pi}{2})+sin'(\frac{\pi}{2})\cdot 1+...+\frac{sin^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}\cdot 1^n+r(x)$$

$$=1+0+\frac{(-1)}{2}+0+\frac{1}{4!}+0+\frac{(-1)}{6!}+...+\frac{1}{(2n)!}+error$$

נראה בהמשך שאפשר לחסום את השגיאה בפיתוח באומדן בעזרת טור לייבניץ. השגיאה תהיה קטנה מ$\frac{1}{(2n+2)!}$ כאשר הפיתוח עד $\pm\frac{1}{(2n)!}$