שחר נבו 2010 מועד א+ב

יובל בר + גל נימצקי + מושיקו קלמרו + ניר בן-ארי

1 מועד א

שאלה. 1 ב

חשב את $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

פתרון. נפעיל לופיטל מספר פעמים ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2\cos x+\cos x-x\sin x}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\sin x}\\&=\boxed{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

שאלה. 2

תהי פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ גזירה ב$(0,1)$, המקיימת $f(0)=0$ ו$f(1)=1$.
בנוסף מתקיים $f'(x)\le 3x^2$ לכל $0<x<1$.
הוכח כי $f(x)=x^3$.

פתרון. נגדיר $g(x):=f(x)-x^3$ כעת נשים לב $g(0)=0,g(1)=0$ ונגזור

$$g'(x)=f'(x)-3x^2\le 0$$

קיבלנו שהנגזרת היא אי-חיובית, הפונקציה רציפה ואין ירידה בקצוות, ולכן $g'(x)$ חייבת להיות 0 בכל הקטע.
כלומר $f'(x)=3x^2$, ולפיכך נקבל $\boxed{f(x)=x^3}$.

שאלה. 3

חשבו את האינטגרלים הבאים:

.1

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$$

.2

$$\int \frac{x^2}{x^2-5x+14}dx$$

.3

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

פתרון. א:

נציב $x = \sqrt{3}\sin\theta$ נקבל $\theta = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$ ו-$dx = \sqrt{3}\cos\theta d\theta$

נשים לב שהצבה טריגונומטרית מתאפשרת כאשר $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ובאמת אחרי ההצבה, זה התחום המתאים

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3}\cos\theta\sqrt{3-3\sin^2\theta}d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \theta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{4}\pi - \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4} \\
&= \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}}
\end{aligned}$$

ב:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-5x+14}dx &= \int \frac{x^2-5x+14}{x^2-5x+14}dx + \int \frac{5x-14}{x^2-5x+14}dx \\
&= x + \int \frac{2\left(2x-5\right)}{x^2-5x+14}dx + \int \frac{x-4}{x^2-5x+14}dx \\
&= x + 2\ln\left|x^2-5x+14\right| + \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x-5}{x^2-5x+14}dx - \int \frac{3}{x^2-5x+14}dx\right) \\
&= x + \frac{5}{2}\ln\left|x^2-5x+14\right| - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{31}{4}} \\
&= x + \frac{5}{2}\ln\left|x^2-5x+14\right| - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{31}}\arctan\frac{x-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{31}{4}}} \\
&= \boxed{x + \frac{5}{2}\ln\left|x^2-5x+14\right| - \frac{3}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{2x-5}{\sqrt{31}}\right) + c}
\end{aligned}
$$

ג:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx &= \left\{u=\arctan x, dv=\frac{dx}{1+x^2}\right\} \\
&\left\{du=\frac{dx}{1+x^2}, v=\arctan x\right\} \\
\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx &= \arctan^2 x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \\
\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx &= \boxed{\frac{\pi^2}{8}}
\end{aligned}
$$

שאלה. 4
נגדיר

$$
f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(nx\right)}{n^\alpha}
$$

1. הראה כי אם $\alpha > 1$ אז הטור מתכנס במ"ש ל-$f\left(x\right)$ ב$\mathbb{R}$.
2. הראה כי אם $\alpha > 2$ אז ל$f\left(x\right)$ נגזרת רציפה ב$\mathbb{R}$.

פתרון. א:
נשתמש במבחן M של ווירשטראס

$$
\left|\frac{\cos\left(nx\right)}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}
$$

וידוע לנו ש$\infty > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \iff \alpha > 1$, ובמקרה הזה הטור מתכנס במ"ש ל$f(x)$ ב$\mathbb{R}$.

ב:

נבדוק את $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)'$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)=\frac{-n\sin nx}{n^{\alpha}}=\frac{-\sin nx}{n^{\alpha-1}}$$

נוכל להשתמש שוב במבחן החסם של ווירשטראס ולקבל $\left|\frac{-\sin nx}{n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, הטור החוסם מתכנס עבור $\alpha > 2$.

כלומר עבור $\alpha > 2$ קיבלנו $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)' < \infty$ במ"ש.

קיבלנו שטור הנגזרות מתכנס במ"ש והוכחנו שהטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$, כעת נוכל לגזור איבר - איבר ונקבל

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^{\alpha-1}}$$

כעת הראנו ש$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^{\alpha-1}}$,בנוסף ידוע שהביטוי שבתוך הטור רציף.

הטור מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$ ולכן הרציפות נשמרת, נקבל ש**עבור** $\alpha > 2$ **הנגזרת רציפה בכל** $\mathbb{R}$.

שאלה. 5

1. מצא רדיוס התכנסות R עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\left(n+\frac{1}{n}\right)}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}x^{n}$ ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.
2. חשב הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{n}x}{n}$ היכן שהטור מתכנס.

פתרון. א:

נשתמש בנוסחת קושי-הדמר

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^{\left(n+\frac{1}{n}\right)}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}\right|}&=\limsup_{n\to\infty}\frac{n^{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{2}{n}}}\\&=\limsup_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^{\frac{1}{n^2}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{n}}}\\&=\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n^2]{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2+\frac{1}{n^2}}}\end{aligned}$$

כעת נבדוק כל גבול

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n} = 1$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2+\frac{1}{n^2}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2}} = \frac{1}{1} = 1$$

נקבל שרדיוס ההתכנסות $R=1$, נבדוק התכנסות בקצוות.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\left(n+\frac{1}{n}\right)}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+2}} 1^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\left(n+\frac{1}{n}\right)}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+2}} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\end{aligned}$$

כעת נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי לפי $\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

כלומר הטורים אחים, ולכן ב$x=1$ מתכנס.
עבור $x=-1$ הטור מתכנס בהחלט, ואפשר לחסום אותו בעזרת הטור ב$x=1$.
כלומר **תחום התכנסות** $[-1,1]$.
ב:
נבדוק תחום התכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$$

נשים לב שהטור יתכנס אך ורק כאשר $|\ln x| < 1$ כי אחרת $\frac{\ln^n x}{n} \not\to 0$ שזה תנאי הכרחי להתכנסות טור.
כלומר, הטור מתכנס בתחום $\left(\frac{1}{e}, e\right)$, בקצוות נקבל את הטור $\frac{1}{n}$ שידוע שמתבדר ואת הטור $\frac{(-1)^n}{n}$ המתכנס לפי לייבניץ.
כלומר הטור מתכנס עבור $x \in [\frac{1}{e}, e)$.
כאשר x בתחום, נחשב את הסכום
נשים לב שהפיתוח של $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$, הטור מתכנס עבור $|t| < 1$, לכן נוכל להציב $\ln x$ מפני ש$|\ln x| < 1$ בתחום שקבענו.

כעת, נציב $t=\ln x$ ונקבל

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}=-\ln\left(1-\ln x\right)}$$

2 מועד ב'

שאלה. 1

1. הגדר קיום אנטגרל לא אמיתי של פונקציה f המוגדרת בקטע $(a,b]$ עם נקודה מיוחדת יחידה a.
2. חשב $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

פתרון. א:
אם ל$f\left(x\right)$ ישנה נקודה סינגולרית ב$x=a$ אזי

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f\left(x\right)dx$$

ב:
נחשב

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right)}{12x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-2xe^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x-x^3\right)}{24x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-3x+x^3\right)}{24x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\left(-3+3x^2\right)e^{-\frac{x^2}{4}}+e^{-\frac{x^2}{2}}\left(3x^2-x^4\right)}{24}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-3}{24}=\boxed{-\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

לופיטל עד שמשפריצים דם

שאלה. 2
הראה כי למשוואה $\cot x=x$ פתרון יחיד ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

פתרון. נסמן $f(x)=x-\cot x$, נשים לב שהנגזרת היא $f'(x)=1+\frac{1}{\sin^2 x}$ והיא חיובית לכל x.

כלומר, הפונקציה עולה ממש ורציפה בתחום.

$$\lim_{b\to 0^+} f(b)=-\infty$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-0$$

$0\in\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$ התמונה של $f(x)$, כעת לפי משפט ערך הביניים קיים $0<c<\frac{\pi}{2}$ כך ש$f(c)=0$.

מפני שהיא עולה ממש אזי הc הוא יחיד.

כלומר $f(x)=0$ רק פעם אחת בקטע, ולפיכך **למשוואה** $\cot x=x$ **יש פתרון יחיד ב-**$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

שאלה. 3

חשב את האינטגרלים הבאים:

1.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^4 x dx$$

2.

$$\int\frac{x^2}{x^2-2}dx$$

3.

$$\int_0^1 x^2\ln x dx$$

פתרון. א:

ידוע ש$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ כלומר $\cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2}$

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3} (\cos 2x + 1)^2\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 2x + 2\cos 2x + 1 dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2} + 2\cos 2x + 1 dx \\
&= \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{2}\cos 4x + 2\cos 2x + \frac{3}{2} dx \\
&= \left(\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{3}{8}\left(\pi/6\right) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{3}}{32}}
\end{aligned}$$

ב:

$$\int \frac{x^2}{x^2-2}dx = \int \frac{x^2-2}{x^2-2}dx + \int \frac{2}{x^2-2}dx$$

נפרק לשברים חלקיים את $\frac{2}{x^2-2}$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2-2} &= \frac{A}{x-\sqrt{2}} + \frac{B}{x+\sqrt{2}} \\
2 &= Ax + A\sqrt{2} + Bx - B\sqrt{2} \\
B &= -A \\
A - B &= \sqrt{2} \\
A &= \frac{\sqrt{2}}{2}, B = -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-2}dx &= x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int \frac{dx}{x-\sqrt{2}} - \int \frac{dx}{x+\sqrt{2}}\right) \\
&= \boxed{x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x-\sqrt{2}\right| - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{2}\right| + c}
\end{aligned}$$

ג:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\ln x dx &= \left\{u=\ln x, dv = x^2 dx\right\}\\ &= \frac{x^3\ln x}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{3}^3\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_0^1\\ &= -\frac{1}{9} - \lim_{x\to 0}\frac{x^3\ln x}{3}\end{aligned}$$

נחשב

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{3x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-9x^{-4}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-9} = 0$$

כעת קיבלנו

$$\boxed{\int_0^1 x^2\ln x dx = -\frac{1}{9}}$$

שאלה. 9

1. הגדר מהי התכנסות במ"ש של סידרת פונקציות $(f_n(x))_n^\infty$ המוגדרת בקטע $[a,b]$
2. תהי $f_0(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,a]$. נגדיר סידרת פונקציות ב- $[0,a]$ באופן הבא:

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$$

לכל $n\geq 1$ ו$0\leq x\leq a$.
הוכח כי $(f_n(x))_1^\infty$ מתכנס במ"ש לס ב$[0,a]$.

פתרון. א:
$f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע $[a,b]$, אם

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}:\forall_{n\geq N,x\in[a,b]}:|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$$

אזי $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל$f(x)$ בקטע $[a,b]$.
ב:
$f_0(x)$ היא אינטגרבילית בקטע סגור ולפי קריטריון רימן היא גם חסומה בו.

נסמן $|f_0(x)| \le M$ כעת, נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned} |f_1(x)| &\le \int_0^x |f_0(t)|\,dt \le \int_0^x M dt = xM \\ |f_2(x)| &\le \int_0^x Mt dt = \frac{x^2}{2}M \end{aligned}$$

כעת נוכל להמשיך כך באינדוקציה ולקבל

$$|f_n(x)| \le \frac{x^n}{n!}M$$

כעת נוכל לבדוק התכנסות במ"ש

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &:= \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \\ &\le \sup_{x\in[0,a]} \frac{x^n}{n!}M \\ &\le \frac{a^n}{n!}M \\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}M = 0 \end{aligned}$$

ואכן, $(f_n(x))_1^\infty$ **מתכנס במ"ש לס ב**$[0,a]$.

שאלה. 5

1. מצא רדיוס ותחום התכנסות R עבור הטור $\sum_{n=1}^\infty (1-(-2)^n)\,x^n$.
2. חשב את הסכום $\sum_{n=0}^\infty (n+2)\,x^n$.

פתרון. א:
נשתמש בנוסחת קושי-הדמר

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1-(-2)^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = 2$$

כלומר $r = \frac{1}{2}$.
נבדוק את $x = \pm\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty (1-(-2)^n)\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1-(-2)^n}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right) \end{aligned}$$

ידוע לנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ מתבדר, ולעומתו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס, ולכן הטור כולו מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-2)^n\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-2)^n}{(-2)^n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(-2)^n}-1\right)$$

ידוע לנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}1$ מתבדר, ולעומתו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n}$ מתכנס, ולכן הטור כולו מתבדר.

תחום התכנסות $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

ב:

נמצא ראשית תחום התכנסות, לפי נוסחת קושי-הדמר

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+2|}=1$$

כלומר רדיוס ההתכנסות הוא 1, נבדוק את הקצוות, כאשר מציבים $x=\pm1$, הסדרה $(n+2)\,x^n\not\to0$ ולכן הטורים מתבדרים.

כלומר תחום התכנסות $x\in(-1,1)$.

לכל x_0 בקטע נשים לב שהטור חזקות מתכנס במש ב$[-|x_0|,|x_0|]$

עבור x בתחום נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}+\frac{2}{1-x}$$
$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n+\frac{2}{1-x}$$
$$=x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{2}{1-x}$$
$$=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{2}{1-x}$$
$$=\frac{x+2\,(1-x)}{(1-x)^2}$$
$$=\boxed{\frac{2-x}{(1-x)^2}}$$

שאלה. ט
נגדיר

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

חשב את $f'\left(0\right)$

פתרון. נחשב לפי הגדרה

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h} & =\lim_{h\to0}\frac{\sin h-h}{h^{2}}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{2h}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{-\sin h}{2}=0\end{aligned}$$

קיבלנו $\boxed{f'\left(0\right)=0}$