מועד א' 2018

שאלה 1

פתרון בכיתה

שאלה 2

חשב את האינטגרלים הלא מסו"מים הבאים

1)

$$\int \log(x+\sqrt{1+x^2})dx =$$

$$= \int \frac{\log(t)(t^2+1)}{2t^2}dt =$$

$$= \int \frac{\log(t)}{2}dt + \int \frac{\log(t)}{2t^2}dt$$

הצבה $\Rightarrow t = x+\sqrt{1+x^2}$

$(t-x)^2 = 1+x^2$

$t^2-2xt+x^2=1+x^2$

$2xt = t^2-1$

$x = \frac{t^2-1}{2t}$

$dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$

1)

$$\frac{1}{2}\int \log(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\log(t) - \int dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t\log(t) - \frac{1}{2}t + C$$

הסבר:

$u = \log(t) \qquad u' = \frac{1}{t}$

$v' = 1 \qquad v = t$

2) הצבה

$u = \log(t)$

$t = e^u$

$du = \frac{dt}{t}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\log(t)}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{e^u} = \frac{1}{2}\int u\cdot e^{-u}du =$$

בחלקים

$$= -\frac{u\cdot e^{-u}}{2} - \frac{1}{2}e^{-u} + C = -\frac{\log(t)}{2t} - \frac{1}{2t} + C =$$

$$= -\frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{2(x+\sqrt{1+x^2})} + C$$

ב

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$$

נבצע חילוק ארוך ונקבל:

$$\frac{x^4}{x^3-1} = \frac{(x^3-1)x + x}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx = \int x + \int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{x}{(\quad)}$$

$$A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) = x$$

נציב) $x=1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$x=0 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

$x=-1 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$

לכן האינטגרל הופך ל-א':

$$\int x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C$$

שאלה = 3

א) נבדוק אם האינטגרל הזה מתכנס בהחלט

באמצעות זה מבחן:

נשים לב ש"מ הגדל $\int_0^1 -\log(x)dx$ $\qquad \int_0^1 \log(x)dx$

פתרון: (השוו' גבול $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ שידוע כמתכנס

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\log(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{*\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot x^{3/2}}{x} = 0$$

ולכן מההתכנסות של $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ נובעת

ההתכנסות של $\int_0^1 -\log(x)dx$ ולכן האינטגרל

שלנו מתכנס בהחלט.

ב) - נראה כי האינטגרל הלא-אמיתי (מסוג ראשון)

$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x}dx$ לאינטגרל הלא אמיתי מסוג שני

($\int_0^1$ מ-סעיף) ונחשב את האינטגרל

מ-סעיף הקודם של א.

פתרון: $t = \frac{1}{x}$ (נעשה את ההצבה:

$x = 1 \Rightarrow t = 1$ $\qquad x = \frac{1}{t}$

$x \to \infty \Rightarrow t \to 0$ $\qquad dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2}dx = -\int_1^0 \frac{\log(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t^2}}\left(\frac{dt}{t^2}\right) = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= \int_0^1 -\log(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 -\log(t)dt \overset{(1)}{=} \text{- - -}$$

אינטגרציה בחלקים

שאלה 4

חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin^n(x)$

ואת תחום ההתכנסות שלו.

פתרון (נסמן כ $t=\sin(x)$ ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n$$

וידוע כי:

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

(נגזור את שני האגפים ונקבל:

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \quad /(\cdot t)$$

$$\frac{t}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} n t^n$$

(נגזור שוב ונקבל:

$$\frac{1+2t}{(1-t)^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1} \quad /(\cdot t)$$

$$\frac{t(1+2t)}{(1-t)^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n$$

(נציב $t=\sin(x)$ ונקבל:

$$\frac{\sin(x)(1+2\sin(x))}{(1-\sin(x))^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin^n(x)$$

חישוב רדיוס ההתכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

כאשר $t=\pm1$ - הטור מתבדר ולכן

הטור מתכנס עבור $|t|<1 \Leftarrow |\sin(x)|<1$ שזה נכון

לכל $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ ולכן תחום ההתכנסות הינו:

$$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$