# מערכת משוואות ליניאריות

## חלק 1

אוניברסיטת בר-אולן , תשע"ו. מאת : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'

1

# חזרה לאלגברה ליניארית

- **מהם התחומים בהם דרוש פתרון של מערכת משוואות ליניאריות ?**

מערכות ליניאריות בפני עצמם, מערכת משוואות לא ליניאריות, פתרון בעיות התחלה ושפה בנושא של משוואות דיפרנציאליות וכו'

- כל מערכת מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

אפשר לכתוב בצורה מטריציאונית

$$Ax = b$$

כאשר $A$ - מטריצת מקדמים ריבועית $n \times n$. $x, b$ - וקטורים $n \times 1$

$U$ - מטריצה משולשת עליונה (כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי הם אפסים :
.($u_{ij}=0 \;\; for \; all \;\; i>j$

$L$ - משולשת תחתונה

$D$ - מטריצה אלכסונית $d_{ij}=0 \;\; for \; all \;\; i \neq j$

$I$ - מטריצת יחידה $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & else\end{cases}$ , $I=\{\delta_{ij}\}_{n\times n}$

$A^{-1}$ - מטריצה הפוכה ל- $A$ : $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

$A$ - הפיכה אם ורק אם $\det A \neq 0$

$A^T$ - מטריצה משוחלפת : $A^T=A\{i \leftrightarrow j\}$

$A$ - אורטוגונלית אם $AA^T=I$

אם $\bar{u},\bar{v}_1,...,\bar{v}_n \in V$ ו- $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ ומתקיים $\bar{u}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{v}_i$ אזי $\bar{u}$ - צירוף ליניארי של $\bar{v}_i$ -
ים או $\bar{u}$ - נפרש ע"י $\bar{v}_i$ - ים. סימון : $\bar{u}\in span(\bar{v}_1,...,\bar{v}_n)$.

אפשר להגיד גם שמטריצה נפרשת ע"י עמודות שלה.

# נורמות של וקטורים ומטריצות

עבור וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|v\| \geq 0$$

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$$

$$\|v\|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^k} \; .$$

למשל, $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ , $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$ , $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$

## עבור מטריצות :

הגדרה : $\|A\| = \max_{x\neq 0,\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$ .

$\|A\|_1 = \max_j\left(\sum_i |a_{ij}|\right)$ , $\|A\|_\infty = \max_i\left(\sum_j |a_{ij}|\right)$, $\|A\|_{fro} = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ - **Frobenius norm**,

$\|A\|_2 = \sqrt{\max \textit{eigenvalue of } A^H A}$ - spectral norm, כאשר $A^H \doteq \bar{A}^T$

$$\|A\| \geq 0$$

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$$

$$\|\alpha A\| \leq |\alpha|\|A\|$$

# מטרה : לפתור מערכת

$$Ax = b$$

## ניתוח רגישות הפתרון . מספר מצב של מטריצה.

קלט : $\tilde{b}$ שהוא וקטור $b$ עם הפרעה כתוצאה משגיאות עיגול.

פלט : $\tilde{x}$ שהוא וקטור המתקבל עם הפרעה עקב הפרעה בקלט

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad A\tilde{x} = \tilde{b}$$

**הגדרת בעיה** : לבדוק איך שגיאה בקלט משפיע על השגיאה בפלט,

כלומר

$$\frac{\left\| x - \tilde{x} \right\|}{\left\| x \right\|} \; ? \; \frac{\left\| b - \tilde{b} \right\|}{\left\| b \right\|}$$

# מספר מצב (Condition number)

$$Ax = b$$

$$-$$

$$\underline{A\tilde{x} = \tilde{b}}$$

$$A\left(x - x\right) = b - b$$

$$x - x = A^{-1}\left(b - b\right)$$

$$\left\|x - x\right\| = \left\|A^{-1}\left(b - b\right)\right\|$$

$$\frac{\left\|x - x\right\|}{\|x\|} = \frac{\left\|A^{-1}\left(b - b\right)\right\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|b - b\right\|}{\|b\|}$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\boxed{\frac{\left\|x - x\right\|}{\|x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \frac{\left\|b - b\right\|}{\|b\|}}$$

## פתרון בעיה :

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

**סימון:** $C_A = cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ - מספר מצב (Condition number) של מטריצה $A$

הגדרה :אם $C_A \gg 1$ אזי A נקראת "מטריצה חולה" (*ill-conditioned*)

אחרת A היא *well-conditioned*

**הערה:** $cond(A) \ge 1$

# שיטות ישירות לפתרון מערכות משוואות ליניאריות

- שיטות שנותנות פתרון אנליטי מדויק (לא כולל round-off errors) אחרי מספר סופי של פעולות

## מערכת משולשת

### מערכת משולשת עליונה

- צורה מטריציאונית

$$Ux = b$$

- צורה מפורשת

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \quad \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \quad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

## **דרך הפתרון** : חילוץ לאחור

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - \qquad \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\
\ldots \\
x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\
x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

בצורה קומפקטית

$$
x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k}{a_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1
$$

**!** הנחה חשובה : $a_{ii} \neq 0$ לכל $i$

**מערכת משולשת תחתונה** $Lx=b$ פותרים באופן דומה

בעזרת **חילוץ לפנים.**

## מספר פעולות הדרושות לפתרון המערכת המשולשת. סיבוכיות.

| צעד | חילוק | כפל | חיסור |
|---|---|---|---|
| **1** | 1 | **0** | **0** |
| **2** | 1 | 1 | 1 |
| … | … | … | … |
| n | 1 | n-1 | n-1 |
| **סה"כ** | n | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ |

מספר פעולות כולל $n^2$

# אלימינציית גאוס (Gauss Elimination)

**הרעיון :** $Ax = b$

$$Ux = \tilde{b}$$

או

$$Lx = \tilde{\tilde{b}}$$

**תנאי חשוב :** A אינה סינגולארית

$$\begin{array}{ll} l_1 & \\ l_2 & \\ \ldots & \\ l_n & \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

צורה מטריציאונית של מערכת לעיל :

$$\left[ A \middle| b \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

**משפט:** פעולות הבאות מביאים את המערכת הליניארית

למערכת שקולה :

(1) החלפת סדר המשוואות

(2) כפל של משוואה בקבוע שונה מאפס

(3) משוואה יכולה להיות מוחלפת בסכום של אותה משוואה

עם משוואה אחרת המוכפלת בקבוע שונה מאפס

## צעד 1.

אם $a_{11} \neq 0$ אזי נחלץ את $x_1$ מהמשוואות $l_2 \ldots l_n$ בצורה הבאה :

$$l_i^{(2)} = l_i^{(1)} - m_{i1} l_1^{(1)}$$

כאשר

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

נקבל מערכת בצורה :

$$\begin{array}{l} l_1 \\ l_2^{(2)} \\ \ldots \\ l_n^{(2)} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \ldots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

או

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

כאשר $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}$ , $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}$

## צעד 2.

אם $a_{22}^{(2)} \neq 0$ אזי נחלץ את $x_2$ מהמשוואות $l_3^{(2)} \dots l_n^{(2)}$ בצורה הבאה :

$$l_i^{(3)} = l_i^{(2)} - m_{i1} l_2^{(2)}$$

כאשר

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \quad i = 3, \dots, n$$

נקבל מערכת בצורה :

$$\begin{array}{l} l_1 \\ l_2^{(2)} \\ l_3^{(3)} \\ \\ l_n^{(3)} \end{array} \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \dots \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)} \end{array} \right.$$

או

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array} \right]$$

כאשר $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)}$, $b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2} b_2^{(2)}$

## צעד n-1.

נקבל מערכת בצורה :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \ldots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

**הגדרה :** מקדם $a_{kk}$ של מטריצה $A$ אשר משתמשים בו כדי לחלץ מקדמים $i = k+1,\ldots,n$ , $a_{ik}$ , נקרא **אלמנט ראשי** או **pivot** .

שורה $k$ -ית נקראת **שורה ראשית**.

## סיכום תהליך גאוס :

- חילוק גאוס נעשה ב $n$-$1$ צעדים.
- בצעד $k$ $(k=1,\ldots,n-1)$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$$

כאשר

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

עבור

$$i, j = k+1, \ldots, n$$

# מספר פעולות הדרושות לתהליך $A \longleftarrow U$

| צעד | חילוק | כפל | חיסור |
|---|---|---|---|
| 1 | n-1 | $(n-1)^2$ | $(n-1)^2$ |
| 2 | n-2 | $(n-2)^2$ | $(n-2)^2$ |
| ... | ... | ... | ... |
| n-1 | 1 | 1 | 1 |
| סה"כ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ | $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ |

מספר פעולות כולל $\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n$

***הערה : נוסחת סכום ריבועים***

$$\sum_{k=1}^{m} k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

# מספר פעולות הדרושות לתהליך $b \leftarrow \tilde{b}$

| צעד | כפל | חיסור |
|---|---|---|
| 1 | n-1 | n-1 |
| 2 | n-2 | n-2 |
| ... | ... | ... |
| n-1 | 1 | 1 |
| סה"כ | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ |

מספר פעולות כולל $n^2 - n$

# מספר פעולות כולל בשיטת גאוס

| $U \leftarrow A$ | $b \leftarrow \tilde{b}$ | $U \leftarrow x$ |
|---|---|---|
| $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$ | $n^2 - n$ | $n^2$ |

## מספר פעולות כולל

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

# שימוש של שיטת גאוס למציאת דטרמיננטה של מטריצה

**יהיו**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \Delta=\det A$$

**אחרי אלימינציית גאוס קיבלנו מטריצה משולשת**

$$U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\det A=\det U$$
$$=a_{11}a_{22}^{(2)}a_{33}^{(3)}\dots a_{nn}^{(n)}$$

# אי-יציבות של שיטת גאוס

- דוגמא 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow[m_{21}=1, m_{31}=1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

**בעיה :** אי-אפשר להמשיך את האלגוריתם משום ש $a_{22} = 0$

**פתרון הבעיה :** להחליף שורות או עמודות.

**חשוב!** החלפת עמודות דורשת החלפת סדר של המשתנים

**אסטרטגית בחירת pivot:** אם $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ נבחר אותו. אחרת נמצא שורה r ראשונה מתחת לשורה k המקיימת $a_{rk}^{(k)} \neq 0$. נחליף $l_k \leftrightarrow l_r$

- **דוגמא 2 :** לפתור את המערכות הבאות בשיטת האלימינציה של גאוס עם דיוק של 3 ספרות במנטיסה (פורמט של נקודה צפה) .

מערכת א'

$$\begin{pmatrix} -1.41 & 2 & 0 \\ 1 & -1.41 & 1 \\ 0 & 2 & -1.41 \end{pmatrix} \mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מערכת ב'

$$\begin{pmatrix} -1.41 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1.41 \\ 1 & -1.41 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## פתרון מערכת א':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1.41 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1.41 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{m}_{21} = -1/1.41 = -0.709 \\ \boldsymbol{m}_{31} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.01 & 1 & 1.71 \\ 0 & 2 & -1.41 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \left| \boldsymbol{m}_{32} = 2/0.01 = 200 \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.01 & 1 & 1.71 \\ 0 & 0 & -201 & -341 \end{array}\right)$$

**ובהצבה לאחור נקבל**

$$x = \left(0.709 \quad 1 \quad 1.7\right)^T$$

## פתרון מערכת ב':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1.41 & 1 \\ 1 & -1.41 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{m}_{21} = 0 \\ \boldsymbol{m}_{31} = -0.709 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1.41 & 1 \\ 0 & 0.01 & 1 & 1.71 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \left| \boldsymbol{m}_{32} = 0.01/2 = 0.005 \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1.41 & 1 \\ 0 & 0 & 1.01 & 1.71 \end{array}\right)$$

**ובהצבה לאחור נקבל**

$$\boldsymbol{x} = \left(1.69 \quad 1.69 \quad 1.69\right)^{\boldsymbol{T}}$$

הפתרון המדויק של המערכת הוא

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1.6949\\1.6949\\1.6949\end{pmatrix}$$

**מקור בעיה :** שגיאת עיגול גדולה המתקבלת כאשר כופל $m$ גדול.

נזכר $\boldsymbol{m_{ik}}=\dfrac{\boldsymbol{a_{ik}^{(k)}}}{\boldsymbol{a_{kk}^{(k)}}}$

נדאג שאלמנט ה- pivot יהיה הכי גדול בעמודה. או יש פתרון אחר ?

# אסטרטגיות לבחירת pivot המקטינות round off errors

- partial pivoting

בכל צעד k : 1. נמצא $\left|a_{pk}\right| = \max\left\{\left|a_{kk}\right|, \left|a_{k+1k}\right|, \ldots, \left|a_{n-1k}\right|, \left|a_{nk}\right|\right\}$

2. נחליף שורות $p \leftrightarrow k$

תועלת : נקבל $\left|m_{ik}\right| \le 1, \quad 1 \le k < i \le n$

הדגמה :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \ldots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right]$$

- complete pivoting

בכל צעד k : 1. נמצא r ו-s הקטנים ביותר המקיימים $\left|a_{rs}^{(k)}\right| = \max_{k\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$

2. נחליף שורות $r \leftrightarrow k$ ועמודות $s \leftrightarrow k$

חסרונות: 1. הרבה יותר פעולות השוואה

2. החלפת עמודות דורשת החלפת סדר משתנים

הדגמה :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right]$$

# Scaling

אתחול : נמצא האלמנט הגדול בכל שורה : $s_i = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \left| a_{ij} \right| \right\}$

בכל צעד k : 1. נתבונן בשורות k:n

2. את שורת ה - pivot נמצא לפי : $\max_{k \le i \le n} \left\{ \frac{\left| a_{ik}^{(k)} \right|}{s_i} \right\}$

3. נחליף את השורה הזאת עם שורה k .

**למה scaling :** 1. "פשרה" בין partial ו- complete pivoting

2. שימושי ביותר כאשר יש מספרים גדולים במקומות

הדורשים החלפת עמודות

- דוגמא לביצוע Scaling :

$$\begin{bmatrix} 3 & 50 & 2 \\ -1 & 3 & 100 \\ 4 & -100 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

אתחול : $\boldsymbol{s} = (50 \quad 100 \quad 100)^{\boldsymbol{T}}$

שלב 1 : $\boldsymbol{s} = (50 \quad 100 \quad 100)^{\boldsymbol{T}} \Leftarrow \boldsymbol{r}^{(1)} = ({\color{red}0.06} \quad 0.01 \quad 0.04)^{\boldsymbol{T}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 50 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & 100 & 10 \\ 4 & -100 & 1 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[m_{31}=1.33]{m_{21}=-0.333} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 50 & 2 & 10 \\ 0 & 19.7 & 101 & 13.3 \\ 0 & -167 & -1.66 & -3.3 \end{array}\right]$$

שלב 2 : $\boldsymbol{s} = (\times \quad 100 \quad 100)^{\boldsymbol{T}} \Leftarrow \boldsymbol{r}^{(2)} = (\times \quad 0.197 \quad {\color{red}1.67})^{\boldsymbol{T}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 50 & 2 & 10 \\ 0 & 19.7 & 101 & 13.3 \\ 0 & -167 & -1.66 & -3.3 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 50 & 2 & 10 \\ 0 & -167 & -1.66 & -3.3 \\ 0 & 19.7 & 101 & 13.3 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{32}=-0.118} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 50 & 2 & 10 \\ 0 & -167 & -1.66 & -3.3 \\ 0 & 0 & 101 & 12.9 \end{array}\right]$$

- **חילוץ לאחור :**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 50 & 2 & 10 \\ 0 & -167 & -1.66 & -3.3 \\ 0 & 0 & 101 & 12.9 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{x}_3 = 0.128$$

$$x_2 = \frac{-3.3 + 1.66 \cdot 0.128}{-167} \approx 0.0185$$

$$x_1 = \frac{10 - 2 \cdot 0.128 - 50 \cdot 0.0185}{3} \approx 2.94$$

- **השוואה :**

| פתרון עם scaling | פתרון עם שחלוף חלקי עם 3 ספרות משמעותיות | פתרון ללא שגיאות עיגול |
|---|---|---|
| $x_3 = 0.128$<br>$x_2 \approx 0.0185$<br>$x_1 \approx 2.94$ | $x_3 = 0.107$<br>$x_2 \approx 0.0189$<br>$x_1 \approx 2$ | $x_3 \approx 0.1786$<br>$x_2 \approx 0.01821$<br>$x_1 \approx 2.9107$ |

## מתי אפשר לבצע אלימינציית גאוס בלי חילופי שורות-עמודות?

- diagonally dominant matrix : $\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|, \quad i = 1 \ldots n$
- symmetric and positive-definite matrix :

$$A^T = A \quad \text{ו-} \quad x^T A x > 0 \quad \text{לכל} \quad x \neq 0$$

### שימושים נוספים של שיטת גאוס.

1. אפשרות לפתור את המערכת עבור מספר כלשהו של וקטורי b שונים בו זמנית
2. אם $A$ אינה סינגולארית, אזי קיימת $A^{-1}$ ו- $AA^{-1} = I$ . יהיו $C_1, C_2, C_3$ עמודות של מטריצה $A^{-1}$ ו- $E_1, E_2, E_3$ עמודות של מטריצה $I$ . המשוואה $AA^{-1} = I$ אפשר לכתוב בצורה

$$\forall C^{\mathrm{J}} = E^{\mathrm{J}} , \forall C^{\mathrm{S}} = E^{\mathrm{S}} , \forall C^{3} = E^{3} \equiv A\left[C_1 \;\; C_2 \;\; C_3\right] = \left[E_1 \;\; E_2 \;\; E_3\right]$$

# אלימינציית גאוס - ג'ורדן (Gauss-Jordan Elimination)

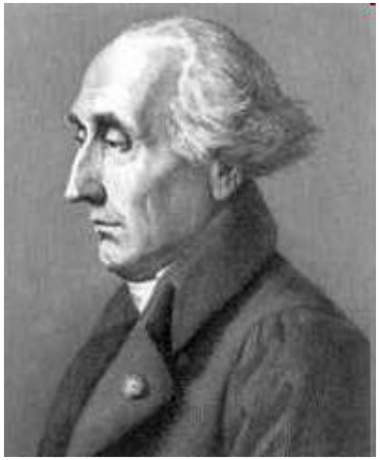
**הרעיון :** $Ax = b \longrightarrow Ix = \tilde{b}$

- זוהי וריאציה של אלימינצית גאוס
- **שוני :** בכל צעד עם pivot שונה מאפס מבצעים פעולות הבאות
  1. מחלקים שורת pivot בערך של pivot
  2. מאפסים את כל האלמנטים בעמודה של pivot, לא רק מתחתיו, גם מעליו.

**יתרונות וחסרונות :** אין צורך בפתרון מערכת משולשת, אבל דרושים כפי 2 פעולות חשבון יותר מאשר בתהליך גאוס

# פירוק LU (LU Decomposition)

פירוק LU במקור פותח כפירוק של תבניות ריבועיות ובי-ליניאריות. לגרנז' פרסם בעיתון הראשון בכתביו (1759) את האלגוריתם שאנחנו קוראים לו אלימינציית גאוס. מאוחר יותר, טיורינג הציג את פירוק LU של מטריצה בשנת 1948 ככלי לפתרון מערכת משוואות ליניאריות.



J-L *Lagrange*
(1736 –1813)

A. M. Turing
(1912-1954)

# פירוק LU (LU Decomposition)

**מוטיבציה** : $A$ – מגדירה מערכת ליניארית מסוימת. רוצים לבדוק

השפעת הקלטים שונים $b$ . יהיו $n$ קלטים $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

אזי צריך לפתור $n$ מערכות $Ax_i = b_i$ , כלומר לבצע $n$ פעמים

חילוץ גאוס. האם אפשר לקצר את התהליך?

נניח כי מטריצה $A$ לא סינגולארית ניתנת לפירוק הבא :

$$A = LU$$

$U$ – מטריצה משולשת עליונה, $L$ – *מטריצה משולשת תחתונה*

אזי : $Ax = b \Leftarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b$ . נפתור $Ly = b$ ואז $Ux = y$ .

# שיטות לפירוק LU

- יש שיטות שונות לפירוק LU
- הפופולארי ביותר – פירוק LU בעזרת אלימינצית גאוס

## (Doolittle form)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & m_{n-1,3} & \cdots & 1 & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-1}^{(n)} & a_{n-1n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

# חזרה לאלגברה ליניארית : מטריצות אלמנטאריות

**המטריצה האלמנטארית** המתאימה **לפעולה אלמנטארית** $f$ מתקבלת ע"י ביצוע הפעולה על מטריצת היחידה $I$ . נסמן אותה ע"י $\boxed{f(I)}$ .

**דוגמאות :**

$$f_1 : R_1 \leftrightarrow R_3 \qquad f_1(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2 : R_2 \to 4 \cdot R_2 \qquad f_2(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 : R_3 \to R_3 - 7R_2 \qquad f_3(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

# מטריצות אלמנטאריות

**משפט:**

תהי $A$ מסדר $\boldsymbol{n\times n}$, אזי מתקיים $\boxed{f(A)=f(I)\cdot A}$

כאשר: $\boxed{f(I)}$ המטריצה האלמנטארית המתקבלת מביצוע $f$

הפעולה על מטריצת $I$ היחידה; $\boxed{f(A)}$ המטריצה $A$ השקולה

ל- המתקבלת ע"י ביצוע הפעולה $f$ על $A$ .

**דוגמא :**

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&1\\5&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow[f:R_2\to R_2-2R_1]{}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&-7\\5&5&5\end{pmatrix}=f(A)$$

$$f(I)\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&1\\5&5&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&-7\\5&5&5\end{pmatrix}=f(A)$$

# המטריצות האלמנטאריות בשיטת גאוס

דוגמא : איפוס האיבר $a_{42}$ ע"י כפל של A משמאל במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}}{a_{22}} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

שקול לפעולה $\boldsymbol{R_4 \rightarrow R_4 - m_{42} \cdot R_2}$

עבור $\boldsymbol{m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}}}$

באופן כללי : איפוס האיבר $\boldsymbol{a_{ij}}$ ע"י כפל של A משמאל במטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שקול לפעולה $\boldsymbol{R_i \rightarrow R_i - m_{ij} \cdot R_j}$

עבור $\boldsymbol{m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}}$

**מסקנה: המטריצות האלמנטאריות בתהליך האלימינציה של גאוס**

**(ללא החלפת שורות ), הן מטריצות משולשות תחתונות.**

**הפעולות האלמנטאריות הן הפיכות :**

1. הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$, $i \neq j$ הפוכה לעצמה.

2. הפעולה $R_i \rightarrow \frac{1}{c} R_i$ הפוכה לפעולה $R_i \rightarrow c \cdot R_i$, $c \neq 0$

3. הפעולה $R_i \rightarrow R_i - c \cdot R_j$ הפוכה לפעולה $R_i \rightarrow R_i + c \cdot R_j$, $i \neq j$

**המטריצות האלמנטאריות המתאימות לפעולות אלמנטאריות הפוכות :**

$\boxed{f(I) \leftarrow f}$ $\Longleftarrow$ $\boxed{f^{-1}(I) \leftarrow f^{-1}}$

**מסקנה** : המטריצות ההופכיות למטריצה ה אלמנטארית בתהליך אלימינציה של גאוס ללא החלפת שורות, הן מטריצות אלמנטאריות ולכן משולשות תחתונות.

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & -\dfrac{\boldsymbol{a}_{ij}}{\boldsymbol{a}_{jj}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \dfrac{\boldsymbol{a}_{ij}}{\boldsymbol{a}_{jj}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שורה $i$

עמודה $j$

# בחזרה לפתרון של $Ax = b$ על ידי פירוק LU

• אפשר לתאר את התהליך הנ"ל כסדרת הכפלות משמאל של

המטריצה $A$ המורחבת במטריצות אלמנטאריות :

$$(A|b) \Rightarrow J_1(A|b) \Rightarrow J_2J_1(A|b) \Rightarrow \ldots \Rightarrow J_n \cdot\cdots\cdot J_2J_1(A|b)$$

$U \doteq J_n \cdot\cdots\cdot J_2J_1A$ - מטריצה משולשת עליונה (לפי בנייה)

$$\Downarrow$$

$$A = (J_nJ_{n-1}\cdots J_2J_1)^{-1} \cdot U = \underbrace{J_1^{-1}J_2^{-1}\cdots J_n^{-1}}_{\doteq L} \cdot U = LU$$

משולשת תחתונה

- צורת אחסון חסכונית :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-11} & m_{n-12} & m_{n-13} & a_{n-1n-1}^{(n)} & a_{n-1n}^{(n)} \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & m_{nn-1} & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

**מספר פעולות בפתרון מערכת משוואות $Ax = b$ בעזרת פירוק LU**

זהה למספר הפעולות בעזרת שיטת גאוס + חילוץ לפנים בפתרון של $Ly = b$

# פרמוטציית מטריצות

- **הגדרה :** מטריצת פרמוטציה $P$ מגודל $\boldsymbol{n \times n}$ היא מטריצה עם אלמנט אחד ויחיד השווה ל-1 בכל שורה ועמודה ושאר האלמנטים שווים ל-0 .

שורות מטריצה $P$ הן פרמוטציית שורות מטריצת יחידה וניתנות להצגה באופן הבא :

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{E}'_{k_1}\ \ \boldsymbol{E}'_{k2}\ \dots\ \boldsymbol{E}'_{k_n}]$$

- **לדוגמא :**

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{E}'_2\ \ \boldsymbol{E}'_1\ \ \boldsymbol{E}'_4\ \ \boldsymbol{E}'_3]$$

- **משפט** : תהי $P=[E'_{k_1}\ \ E'_{k2}\ \dots\ E'_{k_n}]$ - מטריצת פרמוטציות.

מכפלה $PA$ היא מטריצה אשר שורותיה הן שורות המטריצה $A$

בסדר השורות במטריצה $P$ .

- לדוגמא :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

- **משפט** : $P^{-1}=P^T$

- **משפט :** אם $A$ מטריצה לא סינגולארית אזי קיימת מטריצת פרמוטציות $P$, כך שקיים פירוק $PA = LU$.

- **שימוש של פירוק LU עם פרמוטציות לפתרון מערכת $Ax = b$**

1. נבנה מטריצות $P, L, U$.
2. נחשב $\tilde{b} = Pb$
3. נפתור $Ly = \tilde{b}$ על ידי חילוץ לפנים
4. נפתור $Ux = y$ על ידי חילוץ לאחור

$$Ax = b$$
$$PAx = Pb$$
$$PAx = L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

# שיטות אחרות לפירוק LU

- Crout form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cholesky form **(עבור מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית)**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

# אם יש סימטריה – לא נפספס

- נניח כי $A = LU$ ו- $A = A^T$
- אזי $LU = A = A^T = (LU)^T = U^T L^T$
- מכך $U = L^{-1} U^T L^T$

ו-

$$\underbrace{U}_{\text{upper triangular}} \underbrace{\left(L^T\right)^{-1}}_{\text{upper triangular}} = \underbrace{L^{-1}}_{\text{low triangular}} \underbrace{U^T}_{\text{low triangular}} = D$$

- לכן $U = DL^T$

ו- $A = LU = LDL^T$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# שיטת צ'ולסקי (Cholesky form)

**Andre-Louis Cholesky**
1875-1918

**דרישות :** $A$ - מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית*

- בפירוק $A = LDL^T$ מתקיים: $D$ - חיובית

$$D = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{LD^{\frac{1}{2}}}_{\text{low triangular}} \; \underbrace{D^{\frac{1}{2}} L^T}_{\text{upper Triangular}} = \widehat{L}\widehat{L}^T$$

* $y^T A y > 0$ לכל $[y]_{n\times 1} \neq \vec{0}$ **או** דטרמיננטות של כל המינורים הראשיים הם חיוביים

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{T}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}, \quad l_{32} = \frac{a_{23} - l_{21}l_{31}}{l_{22}}, \quad l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

**מקרה כללי של מטריצה** $n \times n$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \left(l_{ik}\right)^2}$$

$$l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}}, \quad i \neq j$$

**יתרון של פירוק :** חסכון של 50% פעולות בפירוק LU

# יתרונות

- A אינה סינגולארית

$$\det A \neq 0 \;\Leftarrow\; \forall y \neq 0 : Ay \neq 0 \;\Leftarrow\; \forall y \neq 0 : y^T A y > 0$$

- אין צורך ב pivoting

מטריצה מוגדרת חיובית היא בעל אלכסון דומיננטי

- Cholesky מהיר יותר מ- LU קלאסי

אין צורך בבניית U

אין צירך ב- pivoting

# השוואת שיטות ביחס לפתרון של מערכת $Ax=b$ עבור $k$ אגפים ימניים $b$ שונים

- סיבוכיות של פירוק $LU$ : $O\left(n^3\right)+O\left(kn^2\right)$
- סיבוכיות באלימינציית גאוס : $O\left(kn^3\right)$

***אם $A$ סימטרית***

- חיסכון של 50% פעולות חשבון בפירוק $LDL^T$
- חיסכון של 50% פעולות חשבון והרבה זיכרון בפירוק Cholesky