תירגול 4

7 בנובמבר 2015

הגדרות:

- נגדיר את הקבוצה האוניברסלית להיות המרחב שבו הקבוצות "חיות", קבוצה המכילה את כל הקבוצות. נסמן קבוצה זו ב־U.
- משלים של קבוצה A הוא הקבוצה $A^c = U\backslash A$.
- תהי A קבוצה כלשהי, קבוצת החזקה של A היאקבוצת כל התת קבוצות של A. היא תסומן על ידי $P\left(A\right)$.

1. השלמה של דיאגרמות ון משבוע שעבר + סעיף ג שלא עשינו.
יהיו A, B, C קבוצות. הוכיחו/הפריכו:
א. אם$A \not\subseteq B\bigcap C$ אז $(A/B)\bigcap(A/C) \neq \phi$
ב. אם $A \subseteq B$ אזי $A\bigcup(B/A) = B$

2. חשבו את קבוצת החזקה של הקבוצות הבאות:
א. $A = \{a, b\}$.

3. תהי X קבוצה, ותהי $R \subseteq P(X)$ תת קבוצה המקיימת:
א. $\phi \in R$.
ב. לכל $A, B \in R$ מתקיים: $A \cup B \in R,\ \ A \setminus B \in R$.
הוכיחו: אם $A, B \in R$ אז:
א. $A \bigtriangleup B \in R$.
ב. $A \cap B \in R$.
פיתרון: א:

$$\begin{aligned} A\triangle B &= A\backslash B\cup B\backslash A\in R \\ & [A\backslash B, B\backslash A\in R] \end{aligned}$$

ב:

$$\begin{aligned} A\cap B &= \left(A\cup B\right)\setminus\left(A\triangle B\right)\in R \\ & \left[\left(A\cup B\right),\left(A\triangle B\right)\in R\right] \end{aligned}$$

4. הוכח כי $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$$\begin{array}{ccc}
(A \cap B) \cup (A \cap B^c) & = & A \cap (B \cup B^c) = A \cap U = A \\
 & \uparrow & \\
 & Distributive & \\
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) & = & A \cup (B \cap B^c) = A \cup \phi = A \\
 & \uparrow & \\
 & Distributive & \\
 & \Downarrow & \\
(A \cup B) \cap (A \cup B^c) & = & (A \cap B) \cup (A \cap B^c)
\end{array}$$

<u>הוכחה:</u>

נוכיח קודם כל את השוויון הראשון.

ראשית, נראה הכלה לצד אחד: $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

כמו שביארנו, ניקח $x \in (A \cap B)^c$. לכן, לפי הגדרת המשלים:

$$\begin{array}{c}
x \notin (A \cap B) \\
\Updownarrow \\
(x \notin A) \vee (x \notin B) \\
\Updownarrow \\
(x \in A^c) \vee (x \in B^c) \\
\Updownarrow \\
x \in A^c \cup B^c
\end{array}$$

ואם כן הוכחנו שמתקיים $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. וגם $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$. (כל הגרירות הם דו כיווניות).

5. הכללת את כללי דה מורגן ל־n קבוצות: הוכח כי לכל $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c$$

נוכיח באינדוקציה: על n:

בסיס האינדוקציה: $n = 2$: חוקי דה מורגן.

נניח שהטענה מתקיימת עבור n מסויים אזי:

$$\begin{array}{rcl}
(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1})^c & = & ((A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1})^c \\
= (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c \cup A_{n+1}^c & = & A_1 \cup \cdots \cup A_n^c \cup A_{n+1}^c \\
 & \uparrow & \\
Induction & & Assumption
\end{array}$$

דאליות איחוד חיתוך: הביטוי הדואלי לביטוי נתון הוא הביטוי המתקבל לאחר החלפות הבאות:

סימני האיחוד $\cup$ בסימני חיתוך $\cap$

סימני החיתוך $\cap$ בסימני האיחוד $\cup$

כל הופעה של ϕתוחלף ב־U

כל הופעה של Uתוחלף ב־ϕ

עקרון הדואליות של תורת הקבוצות אומר שלכל שוויון שמתקיים בין קבוצות מתקיים גם כן השוויון הדואלי.

דוגמא כפי שראינו בשיעור הקודם מתקיים:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

והביטוי הדואלי המתאים:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

6. אם $A \bigcap B = \phi$ אזי $P(A) \bigcap P(B) = \{\phi\}$
נניח בשלילה ש־$P(A) \bigcap P(B) \neq \{\phi\}$, כיוון שהקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצת חזקה אזי החיתוך לא ריק ולכן בהכרח קיימת קבוצה $C \neq \phi$ כזו ש־$C \in P(A) \bigcap P(B)$ אזי:

$$\begin{array}{rcl} C & \in & P(A) \bigcap P(B) \\ & \Downarrow & \\ C \in P(A) & \wedge & C \in P(B) \\ & \Downarrow & \\ C \subseteq A & \wedge & C \subseteq B \\ & \Downarrow & [C \neq \phi] \\ A \cap B & \neq & \phi \end{array}$$

וזו סתירה.