**תזכורת**

יהי מרחב מכפלה פנימית . יהיו בסיסים ל - . אזי: , כאשר מטריצת המעבר בין הבסיסים.

**הערות**

1. אם הפיכה, אזי גם הפיכה.

**הוכחה**

נניח הפיכה. לכן: .

לכן: הפיכה.

1. נניח , . אזי .

**תכונות של בסיסים אורתונורמליים**

1. חישוב הצגה של וקטור נתון:  
   יהי . יהי בסיס של . נסמן את ההצגה של יחסית לבסיס : . נניח ש בסיס אורתונורמלי. אזי .

**הוכחה**  
אם , נכפול (במובן של מכפלה פנימית) ב-, ונקבל:

1. **משפט (פיתגורס)**

יהי בסיס אורתונורמלי. יהי . נסמן: .

אזי: .

**הוכחה**

**הערה**  
אם ו –, אז זה משפט פיתגורס קלאסי.  
**הערה**  
יש הכללות של משפט זה למקרה כאשר .  
רמז: אם נתבונן ב- (פונקציות רציפות), מגדירים מכפלה פנימית:  
.  
**הערה**  
נניח שנתונים שני בסיסים אורתונורמליים של :  
אזי:  
**הגדרה**  
אומרים שמטריצה מרוכבת היא **מטריצה אוניטרית** אם כאשר .  
אומרים שמטריצה ממשית היא **מטריצה אורתוגונלית** אם .  
  
**דוגמה**

**דוגמה**  
**דוגמה**  
g ^𝑟𝑖𝑥)**משפט**

אם בסיסים אורתוגונליים. אזי, מטריצת המעבר היא מטריצה אוניטרית.

**הוכחה**

ראינו שמתקיים: . נשתמש בשחלוף, ונקבל:

**משפט**

תהי מטריצה אוניטרית. אזי:

* השורות של מהוות בסיס אורתונורמלי של .
* העמודות של מהוות בסיס אורתונורמלי של .

להיפך, אם אחד מהתנאים הנ"ל מתקיים, אזי אוניטרית.

**הוכחה**

\*הערה: כמכפלה פנימית ב - , משתמשים במכפלה הפנימית הסטנדרטית.

נניח ש – אוניטרית.

לכן: .

נתבונן בשורות של , נסמנן: .

נרצה להוכיח כי: .

נתון: .

נשתמש בכפל שורה - שורה:

נתבונן בשורה ה - : .

האיבר ה - , בשורה זו שווה ל - , כש - הינו האיבר ה – של , ו - הינו האיבר ה – של העמודה ה – של .

אבל, העמודה ה – של שווה לשורה ה – של , ז"א, .

נקבל שהאיבר ה - של שווה ל - .

מצד שני, האיבר הזה שווה לאיבר ה - של ששווה ל - .

ולכן קיבלנו: .

לעמודות, נשתמש בכפל עמודה – עמודה. נשאיר כתרגיל!

**הגדרה**

יהי מרחב מכפלה פנימית. תהי קבוצה כלשהי. נגדיר:

. קוראים ל - **מרחב ניצב** ל - .

**משפט**

הוא תת מרחב של .

**הוכחה**

***משפט***

***הוכחה***

*יהי . נוכיח ש - . ניקח .*

*יהי . ז"א: לכל . אבל: , ולכן: לכל .*