טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 9

שאלה 1

א. יהיו X, U, V המקיימים את הנחות משפט ון קמפן, מלבד ההנחה הנוספת ש-U ו-V קשירים מסילתית, ויהי $a\in U\cap V$.
הראה שאם $x\in U$, ואם יש מסילה מ-a ל-x ב-X, אז יש מסילה מ-a ל-x ב-U, וכנ"ל עבור V.

הוכחה:

נסתכל על $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$. זהו כיסוי פתוח של I, ו-I מרחב מטרי קומפקטי, ולכן קיים מספר לבג δ. נ"ל שאם נחלק את I לקטעים סגורים $J_1,\dots,J_n$ כך שאורך כל קטע הוא לכל היותר δ, אז לכל i, $J_i\subseteq f^{-1}(U)$ או $J_i\subseteq f^{-1}(V)$, כלומר $f(J_i)\subseteq U$ או $f(J_i)\subseteq V$.

אם $x\in U\cap V$, ברור שיש מסילה כדרוש (כי $U\cap V$ קשיר מסילתית).

לכן נניח $x\in U\setminus V$; לכן, בהכרח $f(J_n)\subseteq U$.

אפשר להניח שההכלה היא לסירוגין בקטעים J_i, אחרת פשוט נחבר קטעים. כלומר $f(J_{n-1})\subseteq V$. לכן, אם $J_n=[b,c]$, $J_{n-1}=[d,b]$, בהכרח $f(a)\in U\cap V$.

אבל $U\cap V$ קשיר מסילתית, ולכן יש מסילה γ_1 מ-a ל-b ב-$U\cap V$.

כמו כן, ע"י שינוי הפרמטר, ניתן להגדיר מסילה γ_2 מ-b ל-x ב-U (שתמונתה תהיה $f(J_n)$).

לכן, $\gamma_1*\gamma_2=:\gamma$ מסילה מ-a ל-x ב-U, כדרוש.

ב. הסק שאפשר להוכיח את משפט ון-קמפן ללא ההנחה ש-U ו-V קשירים מסילתית, אך מצד שני, אין בכך תועלת למעשה.

שאלה 2

יהיו $p_1,\dots,p_k\in\mathbb{R}^n$. חשב את $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{p_1,\dots,p_k\})$.

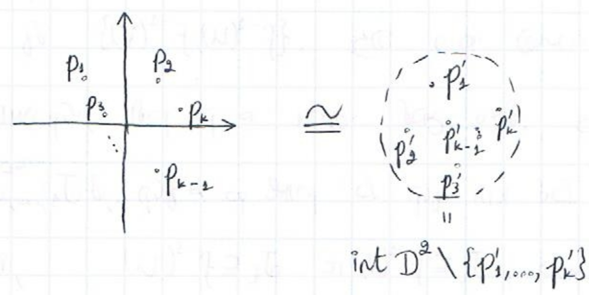
פתרון:

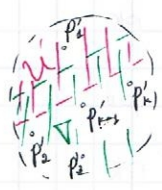
נתחיל מהמקרה שבו $n=2$.

נוכיח באינדוקציה על k כי $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{p_1,\dots,p_k\})\cong F_k$.

עבור $k=1$, הוכחנו בהרצאה שאכן $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{p_1\})\cong\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\cong\mathbb{Z}\cong F_1$.

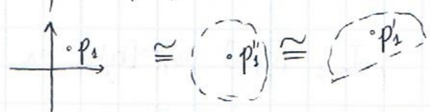
נניח כי הטענה נכונה עבור k-1 טבעי כלשהו, ונוכיח אותה עבור k.

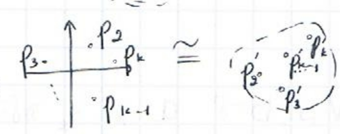




נחלק את הפנים של העיגול בלי הנקודות לשני חלקים על ידי ישרים, כמתואר בשרטוט.

$U\cap V$ כווץ , ולכן $\pi_1(U\cap V)=\{1\}$.

U , ולכן $\pi_1(U)\cong F_1$.

V , ולכן $\pi_1(V)\cong F_{k-1}$ (לפי הנחת האינדוקציה).

i_* ו-j_* הם הטריוויאליים. לכן, לפי משפט ון-קמפן,

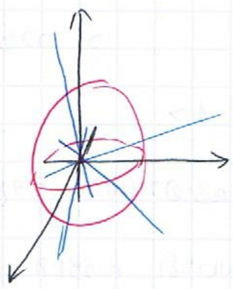
$$\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{p_1,\dots,p_k\})\cong \pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V)\cong F_1 * F_{k-1}\cong F_k$$

אם $n\geq 3$, $\mathbb{R}^3\setminus\{p_1,\dots,p_k\}$ פשוט קשר, ולכן $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus\{p_1,\dots,p_k\})=\{1\}$.

שאלה 3

יהי $X\subseteq\mathbb{R}^3$ איחוד של k ישרים דרך הראשית. מצא את $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus X)$.

פתרון:



הורדנו מ-$\mathbb{R}^3$ ישרים העוברים בראשית, ובפרט את הראשית.
בפרט, אפשר להגדיר את $p_1,\dots,p_{2k}$ נקודות החיתוך
של הישרים ב-X עם S^2, ואז $S^2\setminus\{p_1,\dots,p_{2k}\}$ נסג
עוותי של $\mathbb{R}^3\setminus X$. לכן $\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus X)\cong\pi_1(S^2\setminus\{p_1,\dots,p_{2k}\})$.
כעת, ניעזר בהטלה הסטריאוגרפית להגיד ש-$S^2\setminus\{p_1,\dots,p_{2k}\}\cong\mathbb{R}^2\setminus\{p_1',\dots,p_{2k-1}'\}$. לכן,

$$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus X)\cong\pi_1(S^2\setminus\{p_1,\dots,p_{2k}\})\cong\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{p_1',\dots,p_{2k-1}'\})\underset{\text{שאלה קודמת}}{\cong} F_{2k-1}$$

שאלה 4

הראה שעבור $n>1$, $\pi_1(nT)$ איננה אבלית.

הוכחה:

נזכר כי

$$\pi_1(nT)=\langle a_1,b_1,\dots,a_n,b_n \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}=1\rangle$$

נגדיר הומומורפיזם $\varphi:\pi_1(nT)\longrightarrow F_2$ ($F_2=\langle x,y \mid \ \rangle$). מספיק להגדיר אותו על היוצרים ולהראות שמתקיימים היחסים, ולכן נגדיר

$$\varphi(a_i)=\varphi(b_i)=\begin{cases} x, & 1\le i\le n-1 \\ y, & i=n \end{cases}$$

היחס (היחיד) מתקיים, כי $\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\varphi(a_1)}\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\varphi(b_1)}\underset{\overset{\shortparallel}{x^{-1}}}{\varphi(a_1)^{-1}}\underset{\overset{\shortparallel}{x^{-1}}}{\varphi(b_1)^{-1}}\cdots\underset{\overset{\shortparallel}{y}}{\varphi(a_n)}\underset{\overset{\shortparallel}{y}}{\varphi(b_n)}\underset{\overset{\shortparallel}{y^{-1}}}{\varphi(a_n)^{-1}}\underset{\overset{\shortparallel}{y^{-1}}}{\varphi(b_n)^{-1}}=1$

לכן מוגדר הומומורפיזם כזה $\varphi:\pi_1(nT)\longrightarrow F_2$. הוא גם על, כי x,y בתמונה.

בתרגיל הקודם הראינו ש- F_2 איננה אבלית.

אילו $\pi_1(nT)$ הייתה אבלית, כל תמונה הומומורפית שלה גם הייתה אבלית,

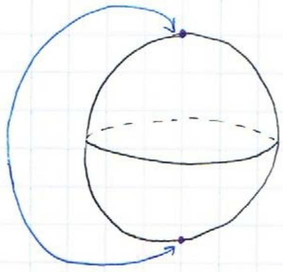
ובפרט גם F_2 - אך F_2 איננה אבלית. לכן גם $\pi_1(nT)$ איננה אבלית.

שאלה 5

יהי X המרחב המתקבל ב-S^2 ע"י זיהוי הקוטב הצפוני והדרומי

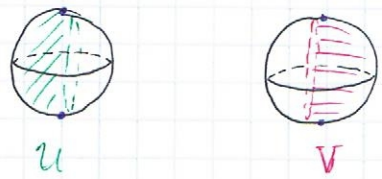
(כלומר הנקודות $(0,0,1)$ ו-$(0,0,-1)$). מצא את $\pi_1(X)$.

פתרון:



נעזר במשפט ון-קמפן.

נגדיר U ו-V כמו בשרטוט הבא:



קודם צריך לחשב את החבורות היסודיות ואת ההומומורפיזמים i_* ו-j_*.

אבל $U\cong V$, ולכן מספיק לחשב את $\pi_1(U)$, את $\pi_1(U\cap V)$ ואת $i_*:\pi_1(U\cap V)\to\pi_1(U)$.

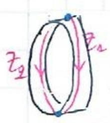
$\boxed{\pi_1(U)}$ U נראה כמו באיור משמאל.

המעגל בכחול הוא נסג עותי של U, ולכן $\pi_1(U)\cong\pi_1(S^1)\cong F_1$.

נסמן $\pi_1(U)=\langle x|\rangle$, כאשר x הוא הלולאה הכחולה.

באופן דומה $\pi_1(V)=\langle y|\rangle$.

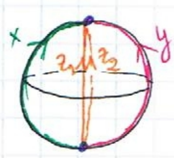
$\boxed{\pi_1(U\cap V)}$ $U\cap V$ הוא כמו הרצועה משמאל (פתוחה) עם הנקודות הכחולות מודבקות.



יש לה נסג עותי שהוא $S_1\vee S_1$ (מרחב ∞), ולכן

$\pi_1(U\cap V)\cong\pi_1(S_1\vee S_1)\cong F_2=\langle z_1,z_2|\rangle$, עם היוצרים באדום.

$\boxed{i_*}$ היוצרים של $U\cap V$, של U ושל V מתוארים בשרטוט



(U בירוק, V באדום, $U\cap V$ בכתום).

אז z_1 ו-z_2 הומוטופיים ביחס לקצוות ל-x ב-U (ע"י סיבוב).

לכן $i_*(z_1)=x$ וגם $i_*(z_2)=x$. באופן דומה, $j_*(z_1)=y$ ו-$j_*(z_2)=y$.

לסיכום, לפי משפט ון-קמפן,

$$\pi_1(X)\cong \pi_1(U) \underset{i_*\nwarrow\, \pi_1(U\cap V)\,\nearrow j_*}{*} \pi_1(V)\cong F_1 \underset{i_*\nwarrow\, F_2\,\nearrow j_*}{*} F_1\cong\langle x,y \mid i_*(z_1)j_*(z_1)^{-1},\ i_*(z_2)j_*(z_2)^{-1}\rangle=$$

$$=\langle x,y \mid xy^{-1},xy^{-1}\rangle=\langle x,y \mid x=y\rangle=\langle x|\rangle=F_1$$