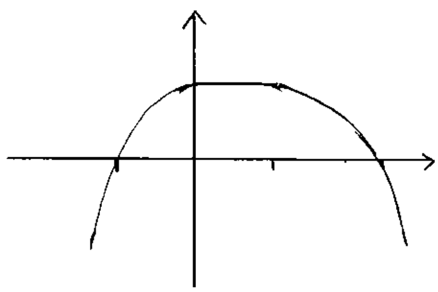
תרגיל 2 -פתרון

שאלה 1

1) הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית:



$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & x>1 \end{cases}$$

ל-f שורשים ב- $x=-1$ וב- $x=1+\sqrt{2}$ (וודאו), אך בכל הקטע $(0,1)$ מתקיים $f'=0$.

2) הטענה נכונה. נוכיח:

יהיו $a<b$ שני שורשים עוקבים של f'.

נניח בשלילה כי קיימים ל f שני שורשים ב-(a,b).

נסמנם: c,d ונניח $c<d$.

אזי, לפי משפט רול (וודאו קיום כל תנאי המשפט!), קיים בקטע (c,d) שורש נוסף של f', בסתירה לכך ש- a ו- b עוקבים.

שאלה 2

1) נתבונן בביטוי: $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$.

לפי הנתון מכפלת המונים שלילית, ומכיוון ש $a<c<b$

הרי ש- $(c-a)(b-c)>0$, ולכן:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0 \qquad (1)$$

f רציפה בקטע $[a,c]$ וגזירה בקטע (a,c)

ולכן, לפי משפט לגרנז' קיים x_1 בקטע (a,c)

כך ש- $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(x_1)$.

באותו אופן, עבור הקטע $[c,b]$, קיים x_2 בקטע

(c,b) כך ש- $\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(x_2)$.

נציב ב-(1) ונקבל כי עבור $a<x_1<c<x_2<b$

מתקיים: $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$

ולכן מתקיים: $f'(x_1)>0$ ו- $f'(x_2)<0$

(או $f'(x_1)<0$ ו- $f'(x_2)>0$)

כלומר $f'(x_2)<0<f'(x_1)$ (או $f'(x_1)<0<f'(x_2)$)

והרי f גזירה בקטע (a,b) ולכן גזירה גם

בקטע $[x_1,x_2]$. לכן, לפי משפט דרבו, f'

מקבלת כל ערך שבין $f'(x_1)$ ל- $f'(x_2)$, ובפרט, קיים

d ב-(x_1,x_2) כך ש- $f'(d)=0$. אולם

$(x_1,x_2)\subset(a,b)$ ולכן $d\in(a,b)$, כנדרש.

2) יהיו a,b כשהם המקיימים:

$0\le a<b<\frac{\pi}{2}$.

הקטע $[a,b]$ מוכל בקטע $[0,\frac{\pi}{2})$.

נסמן:
$$f(x)=\arctan x$$
$$g(x)=\tan x$$

f ו-g רציפות וגזירות ב-$[0,\frac{\pi}{2})$ ולכן גם ב-$[a,b]$

ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים גם $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ולכן:
$$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0.$$

כלומר $g'(x)>0$ ב- (a,b). כמו כן, g רציפה ב-$[a,b]$

ולכן g מונוטונית עולה ב-$[a,b]$ (נובע ממשפט הערך הממוצע),

ומתקיים $g(a)\neq g(b)$. קיימו כי מתקיימים כל תנאי

המשפט המוכלל של הערך הממוצע (קושי), ולכן קיימת

נקודה c ב-(a,b) כך ש-
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

אזי:
$$\frac{\arctan b-\arctan a}{\tan b-\tan a}=\frac{\frac{1}{1+c^2}}{\frac{1}{\cos^2 c}}=\frac{\cos^2 c}{1+c^2}\le\frac{\cos^2 c}{1}\underset{\uparrow}{<}1$$

$c\in(a,b)\subset(0,\frac{\pi}{2})$ לכן $0<\cos c<1$ ואז $0<\cos^2 c<1$.

קיבלנו כי

$$(*) \qquad \frac{\arctan b - \arctan a}{\tan b - \tan a} < 1$$

והרי $\tan x$ עולה בקטע $[0,\frac{\pi}{2})$ ולכן אם ב $[a,b]$

ובפרט $\tan b > \tan a$ אז: $\tan b - \tan a > 0$,

ומ- $(*)$ נקבל כי: $\arctan b - \arctan a < \tan b - \tan a$

כנדרש.