

תרגיל 9

1. יהיו X_1, \dots, X_n מרחבים טופולוגיים, עם טופולוגיות τ_i ובסיסים B_i בהתאמה. הראו שהקבוצה $B_\pi = \{O_1 \times \dots \times O_n \mid O_i \in B_i\}$ היא בסיס לטופולוגיית המכפלה. פתרון:

ידוע שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה היא איחוד של מכפלות של קבוצות פתוחות. לכן מספיק להוכיח שכל מכפלה של קבוצות פתוחות, $U_1 \times \dots \times U_n$ היא איחוד של קבוצות B_π .

ובכן, יהי $(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$. אז לכל i , $x_i \in U_i$. מהגדרת בסיס, לכל i קיים $O_i \in B_i$ כך ש $x_i \in O_i \subseteq U_i$. לכן

$$(x_1, \dots, x_n) \in O_1 \times \dots \times O_n \subseteq U_1 \times \dots \times U_n$$

2. יהיו $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X = \prod X_i$ (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי, עם המטריקה

$$d_{\max}(x, y) = \max \{d_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

פתרון:

לכל B_i יש בסיס שמורכב מכדורים פתוחים. לכן לפי תרגיל 1 הקבוצה הבאה היא בסיס לטופולוגיית המכפלה:

$$B_\pi = \{B(x_1, r_1) \times \dots \times B(x_n, r_n)\}$$

לעומת זאת, לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה יש בסיס שמורכב מכפדורים פתוחים $B_{d_{\max}}(x, \varepsilon)$. נשים לב ש:

$$y \in B_{d_{\max}}(x, \varepsilon) \iff d_{\max}(x, y) < \varepsilon \iff \max \{d_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon \iff \forall i, d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$$

$$\iff \forall i, y_i \in B_{d_i}(x_i, \varepsilon) \iff y \in \prod B_{d_i}(x_i, \varepsilon)$$

$$B_{d_{\max}}(x, \epsilon) = \prod B_{d_i}(x_i, \epsilon)$$

קיבלנו שכל כדור פתוח לפי המטריקה הוא פתוח לפי טופולוגיית המכפלה, לכן הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה מוכלת בטופולוגיית המכפלה.

מצד שני, נראה שכל קבוצה מהצורה $B(x_1, r_1) \times \dots \times B(x_n, r_n)$ פתוחה לפי המטריקה. יהי $(y_1, \dots, y_n) \in B(x_1, r_1) \times \dots \times B(x_n, r_n)$.

מכיוון שכל כדור פתוח במטריקה הוא קבוצה פתוחה, קיימים ϵ_i כך ש $B(y_i, \epsilon_i) \subseteq B(x_i, r_i)$ נבחר $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ אז

$$B((y_1, \dots, y_n), \epsilon) = \prod B_{d_i}(y_i, \epsilon) \subseteq \prod B_{d_i}(y_i, \epsilon_i) \subseteq B(x_1, r_1) \times \dots \times B(x_n, r_n)$$

לכן הקבוצה $B(x_1, r_1) \times \dots \times B(x_n, r_n)$ פתוחה לפי המטריקה. ומכאן נקבל שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה פתוחה בטופולוגיה המושרית מהמטריקה. כלומר, טופולוגיית המכפלה מוכלת בטופולוגיה המושרית מהמטריקה.

3. יהי (X, d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה). פתרון:

(א) לפי התרגיל הקודם, $X \times X$ מטריזבילי, והטופולוגיה τ_π מושרית מהמטריקה d_{\max} . נראה, אם כן, שהפונקציה d רציפה לפי המטריקה d_{\max} ולכן גם רציפה לפי τ_π . תהי $(x, y) \in X \times X$ ויהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. כעת, אם $d_{\max}((x, y), (z, w)) < \delta$ אז:

$$|d(x, y) - d(z, w)| = |d(x, y) - d(y, z) + d(y, z) - d(z, w)| \leq |d(x, y) - d(y, z)| + |d(y, z) - d(z, w)| \leq$$

$$d(x, z) + d(y, w) < \delta + \delta = \epsilon$$

ולכן d רציפה (המעבר השלישי נובע מא"ש המשולש).

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ספרביליים. האם $X \times Y$ ספרבילי? פתרון:

(א) מהגדרת ספרביליות, קיימות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ צפופות ובנות מניה. מתרגיל שעשינו בכיתה:

$$cl(A \times B) = cl(A) \times cl(B)$$

כלומר:

$$cl(A \times B) = X \times Y$$

ולכן $A \times B \subseteq X \times Y$ צפופה.

מכיוון שהקבוצות A, B הן בנות מניה גם $A \times B$ בת מניה (למתקדמים: הוכיחו זאת). יש להשתמש בלמה של צורן ובהרבה מצב רוח). לכן $X \times Y$ ספרבילי.

5. יהיו $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים טופולוגיים T_1 . הוכיחו שמרחב המכפלה הוא T_1 . פתרון:

(א) אנו יודעים שמספיק להראות שכל נקודון הוא סגור במרחב המכפלה. אם כן, יהי $\prod \{x_i\}$ נקודון. המשלים שלו הוא הקבוצה:

$$\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$$

כאשר $Y_{i,j} = X_j$ אם $i \neq j$ ו- $Y_{i,j} = X_j \setminus \{x_j\}$ אם $i = j$. בכל מקרה, $Y_{i,j} \subseteq X_j$ פתוחה (אם $i = j$, מכיוון ש- X_j הוא T_1 הנקודון $\{x_j\} \subseteq X_j$ הוא סגור ולכן $X_j \setminus \{x_j\}$ פתוחה). מהגדרת טופולוגיית המכפלה, $\prod_j Y_{i,j} \subseteq \prod_j X_j$ פתוחה ולכן גם $\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות). לכן $\prod \{x_i\}$ סגורה.

6. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש: $X \times Y \cong Y \times X$. פתרון:

(א) נגדיר פונקציה $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$ על ידי:

$$f(x, y) = (y, x)$$

נשים לב לכך שהפונקציה:

$$p_1 \circ f: X \times Y \rightarrow Y$$

שווה לפונקציה $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ ולכן רציפה. כמו כן הפונקציה:

$$p_2 \circ f: X \times Y \rightarrow X$$

שווה לפונקציה $p_1: X \times Y \rightarrow X$. לכן הפונקציות $p_1 \circ f, p_2 \circ f$ רציפות ולכן גם f רציפה. קל לראות שההופכית של f היא הפונקציה:

$$f^{-1}: Y \times X \rightarrow X \times Y$$

המוגדרת על ידי $f^{-1}(y, x) = (x, y)$. רציפה (בדומה ל- f) ולכן f הומיאומורפיזם.

7. הוכיחו שהאותיות הבאות אינן הומיאומורפיות (כתתי קבוצות של \mathbb{R}^2):

$$K, B, C, D$$

פתרון:

ב- K יש נקודה שאם נסיר נקבל מרחב בין 4 רכיבי קשירות, ובשום אות אחרת אין נקודה כזאת. לכן K לא הומיאומורפי לכל השאר.

ב- C כל נקודה שנוריד תהפוך את המרחב ללא קשיר, ואילו ב- B ו- D יש נקודות שאם נוריד המרחב עדיין ישאר קשיר, לכן C לא הומיאומורפי ל- B ו- D .

ב- B יש נקודה שאם נוריד תהפוך את המרחב ללא קשיר, ואילו ב- D כל נקודה שנוריד תשאיר את המרחב קשיר. לכן B ו- D לא הומיאומורפיים.

8. הוכיחו שאם $f : X \rightarrow Y$ הוא הומואומורפיזם, ו $A \subseteq X$, אז $f|_A : A \rightarrow f[A]$ הפונקציה המצומצמת, היא הומואומורפיזם.
פתרון:

חח"ע ועל זה ברור.

נוכיח רציפות:

תהי $O \subseteq f[A]$ פתוחה. כלומר, $O = U \cap f[A]$, כאשר U פתוחה ב Y . אז

$$f|_A^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[U \cap f[A]] = A \cap f^{-1}[U] \cap f^{-1}[f[A]] = A \cap f^{-1}[U]$$

פתוחה בטופולוגיית תת המרחב על A .

הרציפות של f^{-1} המצומצמת על $f[A]$ מתקבלת בדיוק באותה צורה.