נבחר $c=0$ ונקבל $f(x,y) = \frac{y}{x-y}$

3) בסעיף (ג) חשבו את

$$\boxed{I} = \int_\Gamma -\frac{y}{(x-y)^2}\,dx + \frac{x}{(x-y)^2}\,dy$$

כאשר Γ עקומה כלשהי המחברת את $A=(0,-1)$ ו $B=(1,0)$
(בכיוון מ A ל B) שנמצאת ב D. מה המשמעות רצה לומר
על השדה $\vec{F}$?

פתרון: לפי משפט היסודי של החדו"א לשדות $F = \nabla f$ אז:

$$\int_\Gamma F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

כאשר Γ היא עקום המתחיל מ A ונגמר ב B.

$$\Rightarrow I = f(1,0) - f(0,-1) = 0 - (-1) = 1$$

3. ב׳

$$\vec{F} = -\frac{y}{(x-y)^2}\,i + \frac{x}{(x-y)^2}\,j$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; y < x\}$$

א) האם $\vec{F}$ סגור

פתרון: נבדוק כי הדיפ׳ $\omega = -\frac{y}{(x-y)^2}dx + \frac{x}{(x-y)^2}dy$

הדיפ׳ סגורה. (נגזור את ω ונקבל)

$$d\omega = \left(\frac{2y}{(x-y)^3}dx + \frac{x+y}{(x-y)^3}dy\right)\wedge dx$$

$$\left(-\frac{x+y}{(x-y)^3}dx - \frac{2x}{(x-y)^3}dy\right)\wedge dy$$

$$= -\frac{x+y}{(x-y)^3}dy\wedge dx - \frac{x+y}{(x-y)^3}dx\wedge dy = 0 \Rightarrow$$ הדיפ׳ סגורה.

ב) האם F משמר?

פתרון: מספיק להראות כי $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$

ואכן $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right) = -\frac{(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$

ג) אם התשובה ל(ב) חיובית - מצאו את הפונקציה של $\vec{F}$ ב Ω.

פתרון: נמצא אינטגרל של $-\frac{y}{(x-y)^2}$ ביחס לx ונקבל

$$\int -\frac{y}{(x-y)^2}dx = \frac{y}{(x-y)} + h(y) \overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\Rightarrow} \frac{x}{(x-y)^2} + h'(y) = \frac{x}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow h(y) = c$$

Generated by CamScanner from intsig.com

1) תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^3+z^2 = -\tfrac{1}{2},\ x+y+z=0\}$$

א) האם קבוצה זו יריעה? אם כן, מה מימדה?

פתרון: נרצה להראות כי $\operatorname{rank}(Jac(g)) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\end{pmatrix} = 2$ בכל נק' ב-M כאשר

$g_1(x,y,z) = x^2+y^3+z^2+\frac{1}{2}$

$g_2(x,y,z) = x+y+z$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & 3y^2 & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

מספיק להראות כי השורות אינן תלויות — שכן $M \not\ni P = (c,c,c)$.

$$\begin{pmatrix}2x\\ 3y^2\\ 2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ c\\ c\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{c}{2} \\ y = \sqrt{\frac{c}{3}} \\ z = \frac{c}{2}\end{matrix}$$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

g_2 נותן:

$$\Rightarrow \frac{c}{2} + \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c}{3}} = 0 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{c}{3}}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{c}{3} \to c = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{6},\ y = -\frac{1}{3},\ z = \frac{1}{6}$$

g_1 נותן:

$$\to \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{36} - \frac{1}{27} = \frac{1}{18} - \frac{1}{27} = \frac{3-2}{9\cdot 6} = \frac{1}{54} \neq -\frac{1}{2}$$

לכן M הנה יריעה ממד 1.

ב) מהו המרחב המשיק ל-M בנקודה $(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$?

פתרון: המרחב המשיק ל-M בנקודה הנ"ל הוא המרחב המאונך לשורות של המטריצה $\begin{pmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\end{pmatrix}$ בנק' הנ"ל לכן זהו המרחב

$$\begin{pmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\end{pmatrix}\Bigg|_{(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})} = \{(v_1,v_2,v_3) : \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = 0\}$$

6. א) תהי ω תבנית k מ- $C^2(\mathbb{R}^n)$ הראו ש $d^2\omega=0$

נתון תחום.

פתרון: מההרצאה -

מספיק להוכיח במקרה ש $\alpha = f\,dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$ כלומר לגבי - רכיב אחד, ולהוכיח שהכל שווה לאפס.

$$d\alpha = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}dx_r\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

$$d(d\alpha) = \sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_r}dx_s\wedge dx_r\wedge(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})$$

$$\sum_{1\le r\le s\le n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_r}dx_s\wedge dx_r + \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_s}dx_r\wedge dx_s\right)\wedge(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})$$

$$\sum\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial x_r}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_s}\right)dx_s\wedge dx_r\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} = 0$$

ב) חשבו את הערך של התבנית $\omega = dx\wedge dy + dz\wedge dx$

על הוקטורים $\xi_1=(1,2,3)$ $\xi_2=(-2,1,-1)$

$$dx\wedge dy\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1&2\\-2&1\end{vmatrix} = 1-(-2)\cdot 2 = 5$$

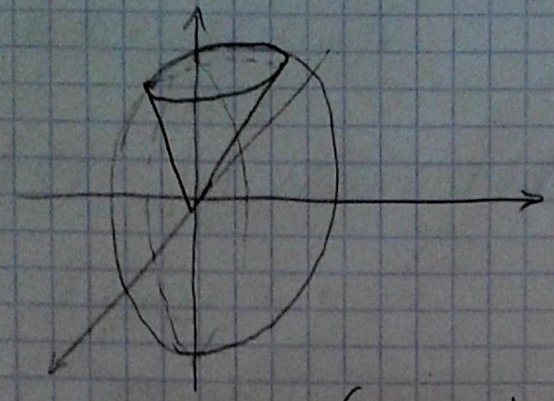
$$dz\wedge dx\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3&1\\-1&-2\end{vmatrix} = -6-(-1)\cdot 1 = -5$$

$$= \omega\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&1&-1\end{pmatrix} = 5-5=0$$

4) נמצא שטח כבוני של חלק הספירה:

$$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=16,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z\}$$

סקיצה



דרך 1:

נעבור לפרמטריזציה

כדורי – יעקבי

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)$$

לכן נרצה ש $\sqrt{r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} \le r\cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$0 \le \varphi \le \pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

מכאן נקבל פרמטריזציה ל M ע"י

$$\psi : (\theta,\varphi) \to (4\sin\varphi\cos\theta,\ 4\sin\varphi\sin\theta,\ 4\cos\varphi)$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

נחשב:

$$S(M) = \iint_S dS = \iint_D \|\psi_u \times \psi_v\|\,du\,dv$$

כאשר ψ היא פרמטריזציה של S.

נחשב את:

$$\psi_\theta = (-4\sin\varphi\sin\theta,\ 4\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$
$$\psi_\varphi = (4\cos\varphi\cos\theta,\ 4\cos\varphi\sin\theta,\ -4\sin\varphi)$$

$$\psi_\theta \times \psi_\phi = -16\sin^2\phi\cos\theta\,\hat{i} - 16\sin^2\phi\sin\theta\,\hat{j}$$

$$-16\sin\phi\cos\phi\,\hat{k}$$

$$\|\psi_\theta \times \psi_\phi\| = 16\sin\phi$$

$$\Rightarrow |S| = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 16\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 16\pi(2-\sqrt{2})$$

דרך ב: נגדיר ל_ הבסיס $F = \frac{\vec{r}}{4}$ (z=4) עם 16 (z=4)

שכזה ונקרא לו $S = M \cup \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = z,\ 0 \le z \le 4\}$

על M $\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{\|r\|}{4}\cdot\hat{r}\cdot\hat{n} = 1$ כי $\hat{r}$ מקביל ל-

המעטפת. כאשר הנורמל F מקביל ל $\hat{n}$ ולכן (e.) שווה 0.

מכאן $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = |M|$

לפי משפט הדיברגנץ $\iiint_V \operatorname{div} F\, dv = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div}\left(\tfrac{1}{4}(x,y,z)\right) = \frac{3}{4}$$

$$= |S| = \iiint_V \frac{3}{4}\, dx\, dy\, dz = \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{4} r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

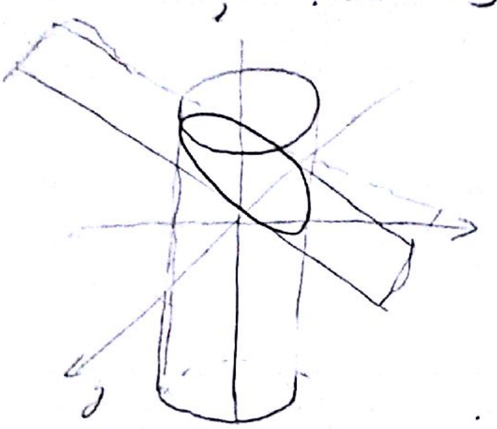
$$= 16\pi(2-\sqrt{2})$$

5) בעזרת משפט סטוקס חשבו

$$\int_\Gamma (2x+y+2z)dx+(x+2y+2z)dy+(x+y+2z)dz$$

כאשר Γ היא חיתוך של הגליל $\{(x,y,z): x^2+y^2=4\}$ עם המישור $x+2z=2$ והכיוון של Γ נגד כיוון השעון אם מסתכלים מכיוון החיובי של ציר x.

פתרון:



נסמן את ω ונקבל

$$\int_\Gamma (2dx+dy+2dz)dx+(dx+2dy+2dz)dy+(dx+dy+2dz)dz = \int_S dzdx - dydz$$

נבחר פרמטריזציה $\psi = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, 1-\frac{\cos\theta}{2}\right)$

$$\psi_r = \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{\cos\theta}{2}\right)$$

$$\psi_\theta = \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, \frac{r\sin\theta}{2}\right)$$

$$dzdx\begin{pmatrix}\psi_r\\ \psi_\theta\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\cos\theta}{2} & \cos\theta \\ \frac{r\sin\theta}{2} & -r\sin\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{2}\cos\theta\sin\theta - \frac{r}{2}\cos\theta\sin\theta = 0$$ מעולה!

$$dydz\begin{pmatrix}\psi_r\\ \psi_\theta\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta & -\frac{\cos\theta}{2} \\ r\cos\theta & \frac{r\sin\theta}{2} \end{vmatrix} = \frac{r}{2}\sin^2\theta + \frac{r}{2}\cos^2\theta = \frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \omega = \int_S d\omega = \int_0^2\int_0^{2\pi} \frac{r}{2}\, d\theta dr = 2\pi \left.\frac{r^2}{4}\right|_0^2 = 2\pi$$