תזכורת: הגדרנו מכפלה סקלית של וקטורים ב$\mathbb{R}^n$, מסמנים ב$\langle v,u\rangle$, זה שווה להכפלה רכיב רכיב ולסכום בינהם.
אורך/ נורמה של וקטור $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.
הגדנו זוית בין שני וקטורים, מחשבים ע"י

$$\cos\theta = \frac{|\langle v,u\rangle|}{||v||\cdot||u||}$$

הגדרה: וקטור נקרא "מנורמל" אם הנורמה שלו היא 1.
למשל:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\\0\\\sqrt{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{4}}\\\sqrt{\frac{3}{4}}\\0\end{pmatrix}$$

הגדרה: יהי $v \neq 0$. הנירמול של זה וקטור $\tilde{v}$ שנמצא ב$span(v)$ והוא מאורך 1.
איך מחשבים? וקטור ב$span(v)$ הוא כפולה בסקלר של v, כלומר הוא מהצורה αv.

$$||\alpha v|| = 1$$

$$\sqrt{\langle\alpha v,\alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v,v\rangle} = \alpha\sqrt{\langle v,v\rangle} = \alpha||v||$$

כלומר, אנחנו מחפשים α שיקיים $\alpha||v|| = 1$. לכן נקח $\alpha = \frac{1}{||v||}$.
לדוגמא: $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. מצאו את $\tilde{v}$.
פתרון: נחשב $||v|| = \sqrt{1^2+2^2+3^3} = \sqrt{14}$. אז נקח $\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

$$\tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

הגדרה: וקטורים v וu נקראים מאונכים/אורתוגונלית, אם הזווית בינהם היא 90.

$$\cos\theta = \frac{|\langle v,u\rangle|}{||v||\cdot||u||}$$

כזכור $\cos 90 = 0$. לכן וקטורים v, u מאונכים אמ"ם המכפלה הסקלית של שניהם היא 0.

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל: תנו וקטור שונה מ0 שמאונך ל

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

פתרון $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

הערה: וקטור ה0 נחשב מאונך לכל וקטור.

הגדרה: יהיו $v, u \in \mathbb{R}^n$. ההיטל של v על u, מסמנים ב$\pi_u(v)$ הוא וקטור ב$span(u)$, כלומר מהצורה αu, שמקיים ש$u \perp (v - \alpha u)$.

אז בשביל למצור את ההיטל צריך למצוא את הסקלר α.

$$\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$$

$$\langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$$

לכן

$$\pi_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

דוגמא: חשבו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על הוקטור $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\alpha = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle} = \frac{11}{25}$$

לכן

$$\pi_u(v) = \frac{11}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

נדגים: אם לא טעינו אנחנו אמורים לקבל ש$u \perp (v - \pi_u(v))$.

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{-8}{25} \\ \frac{6}{25} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

דוגמא נוספת: חשבו את ההיטל של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ על $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

פתרון:

$$\alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$\pi_u(v) = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

שאלות ממבחן:

1. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נקודות) חשבו את הפולינום האופייני והערכים העצמיים של A.

(ב) (10 נקודות) קבעו האם A לכסינה. במידה וכן, מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש$P^{-1}AP = D$.

פתרון:

$$p_A(x) = |xI - A| = |\begin{pmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ -6 & 0 & x+3 \end{pmatrix}| =$$

נחשב דטרמיננטה לפי מינורים, עם העמודה הראשונה.

$$(-1)^{1+1}(x-3)|\begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x+3 \end{pmatrix}| + (-1)^{1+3}(-6)|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ x-2 & -1 \end{pmatrix}| =$$

$$(x-3)(x-2)(x+3) - 6[1 - (x-2)] =$$

$$(x-3)(x-2)(x+3) - 6(-x+3) =$$

$$(x-3)(x-2)(x+3)+6(x-3)=$$

$$(x-3)[(x-2)(x+3)+6]=$$

$$(x-3)(x^2+x)=(x-3)x(x+1)$$

$$x^3-7x-6=?$$

יש 3 ע"ע $\lambda_1=3,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$.
ב. הוכחנו בהרצאה שאם למטריצה מגודל n יש n ע"ע שונים אז היא לכסינה.
הר"א של כל ע"ע הוא 1, ואנחנו יודעים שר"ג של ע"ע הוא נמצא בין 1 לר"א, לכן לכל ע"ע הריבוי הגאומטרי שווה ל1 , ואז ר"א=ר"ג לכל ע"ע (ואנחנו רואים שהפולינום האופייני התפרק לגורמים ממעלה 1)- אז היא לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

או בסדר שונה.
בשביל לבנות את P אנחנו צריכים למצוא וקטורים עצמיים.
צריך לחשב את מרחב האפס :

$$N(\lambda I-A)$$

עבור כל אחד מהערכים העצמיים. $N(3I-A)=N\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to\frac{-1}{6}R_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x=y=t\ z=t$

$$\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

העמודה הראשונה בP תהיה הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

עבור הע"ע $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 0 & +3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא z. נציב $z = t$. ולכן $x = \frac{1}{2}t$ ו$y = -\frac{1}{2}t$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N(3I - A) = span \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

העמודה השניה של P היא $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

מותר להכפיל ב2 בשביל לקבל מספרים יותר יפים. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

לבסוף נחשב את במרחב העצמי של $\lambda_3 = -1$

$$N \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נדלג על החישוב.

בסוף מקבלים את הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ולכן

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

מצאנו את P ו-D.

אפשר גם רק בשלב הזה להגיד שהיא לכסינה, כי ראינו שלכל ע"ע יצא שהר"ג הוא 1, ולכן הר"ג שווה לר"א.