

מרצה פרופסור נתן נתניהו
טלפון 03-531-7721
דוא"ל nathan@cs.biu.ac.il
שעות קבלה: יום ד', 17⁰⁰ – 16⁰⁰

- ספרים**
- An Introduction to Numerical Analysis, K.E. Atienson, Wiley, 1978
 - Introduction to Matrix Computations, G.W., Stenrant, Academic Press, 1973
 - Numerical Analysis, T. Sahen, Addison Werley, 2006
 - A Friendly Introduction to Numerical Analysis, B. Bandie, Practice Hall, 2006
 - Applied Numerical Analysis, C.F. Gerald, P.O. Wheatley, 7th edition, Addison Wesley 2004
 - Numerical Analysis and Scientific Computation, J.L. Leaden, Addison Westley, 2004

יש רשימות ידניות בספרייה למתמטיקה

היסטוריה + מוטיבציה

- מקור מדעי המחשב מהמתמטיקה. אבי מדעי המחשב היה המתמטיקאי הבריטי אלן טיורינג. התחום התחיל באלגוריתמים וחישובים נומריים ידניים.
- נושא החישובים הנומריים הוא לא רק חלק מההיסטוריה של מדעי המחשב, אלא בעיה שמדעני מחשב נתקלים בה הרבה במהלך הקריירה.
- הרבה פעמים רוצים לחשב באופן מדויק בעיות מתמטיות שונות, ובשביל זה צריך אלגוריתמים נומריים.
- צריך ללמוד על עקרונות של חישובים נומריים שמשפיעים על אלגוריתמים:
 - התכנסות - כמה מהר ביטוי מסויים מתכנס? האם הביטוי בכלל אמור להתכנס?
 - סיבוכיות
 - יציבות - עד כמה פתרון נומרי יציב. עד כמה שינויים קלים בקלט משפיעים על הפלט? אם שינוי קטן בקלט גורם לשינוי גדול בפלט, אז כנראה שהפתרון לא יציב - או שהבעיה עצמה לא יציבה.
 - דחיסה(נפח)
 - אופטימיזציה - איך לפתור בעיות בצורה יותר יעילה.

ייצוג מספרים ושגיאות

מכונה היא משאב סופי, ולכן היא לא יכולה לייצג מספרים (שהם חלק מקבוצה אינסופית) באופן אבסולוטי. לא כל מספר ניתן לייצג בצורה אבסולוטית במחשב. כלומר בכל מספר שמיוצג במחשב יש שגיאה מסויימת. לכן, כאשר מבצעים פעולות על המספרים, השגיאה מתפשטת.

פתרון משוואות לא לינאריות

הבעיה הבסיסית במתמטיקה ניתנת לכתיבה בצורה

$$f(x) = 0$$

כאשר $f(x)$ היא פונקציה של x . הפתרונות נקראים שורשי המשוואה. ניתן גם לכתוב מערכת של משוואות:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

ישנן מספר שיטות לפתור בעיה כללית כזו:

- שיטת החציה
- איטרפולציה לינארית - מבצעים קירוב לינארי של הפונקציה בסביבת השורש, מה שמאפשר להשתמש בשיטות איתרטיביות
- שיטת ניוטון-רפסון
- שיטת Mullen - הרחבה לקירוב הלינארי, רק שפה הקירוב הוא ריבועי
- איטרציות "נקודות שבת" (fixed point) - הופכים את $f(x) = 0$ למשוואה $g(x) = x$ שהיא שקולה במובן שכל פתרון של $f(x) = 0$ מקיים את המשוואה $g(x) = x$
- שונות - למשל מציאת פולינומים

שיטת החציה

כדי למצוא אריה במדבר, חוצאים את המדבר ל2, ובודקים באיזה חצי הוא נמצא. את החצי הזה מחלקים שוב ל2, וממשיכים באותה שיטה עד שמגיעים לשטח מספיק קטן. בעזרת השיטה הזו ניתן למצוא את שורשי $f(x) = 0$, כאשר מתקיימים שני תנאים:

- נתונים x_1, x_2 כך ש $f(x_1) f(x_2) < 0$ - כלומר צד אחד נמצא מעל לציר ה x וצד שני מתחת לציר ה x .
- הפונקציה רציפה.

בהינתן התנאים האלה, לפי משפט הערך הממוצע, יש שורש בין x_1 ל x_2 , וניתן למצוא אותו באמצעות האלגוריתם:

```

repeat
     $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;
    if  $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$  then
         $x_2 = x_3$ ;
    else
         $x_1 = x_3$ ;
until  $|x_1 - x_2| < 2 \cdot \text{TOL}$ 

```

הרעיון הוא שבכל איטרציה, בודקים אם ל- $f(x_3)$ אותו סימן כמו $f(x_1)$ או כמו $f(x_2)$, ולפי זה בוחרים אם להזיז את x_1 או את x_2 . ממשיכים עד ש- $|x_1 - x_2|$ - כלומר מרחב הפתרונות האפשריים - קטן יותר מ- $2 \cdot \text{TOL}$, כאשר TOL הוא קבוע שרירותי שמגביל את השגיאה האפשרית. בסוף התהליך מחזירים את x_3 , TOL הוא השגיאה האפשרית המקסימלית מהפתרון המדויק.

דוגמה

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x$$

השורשים הם בערך $x_1 = 1.9, x_2 = 0.35$. כאשר מחשבים עם שיטת החציה, עם אינטרבל התחלתי $x_1 = 0, x_2 = 1$ ו- $\text{TOL} = 1E - 4 = 10^{-4}$ מקבלים 0.36.

יעילות

השיטה לא נחשבת יעילה מבחינת שיעור ההתכנסות שלה.

מתי השיטה לא תעבוד?

- לדוגמה בפונקציה $y = x^2$. במקרה הזה הפונקציה תמיד חיובית, ולכן לא ניתן לדעת עם x_3 נמצא מימין או משמאל לפתרון.

מדד אלטרנטיבי

אפשר להסתכל על מדד אחר - במקום לבדוק ש- $|x_1 - x_2|$ מספיק קטן, בודקים ש- $|f(x_3)|$ מספיק קטן. אבל אז, אם הפונקציה "שטוחה" בסביבת השורש, מקבלים אזור מאוד רחב.