חשבון אינפיניטסימלי 3 ־ תרגול מס' 3

יובל חצ'טריאן

12 בנובמבר 2017

1 רציפות וגבול של פונקציה בנקודה

שאלה 1.1 חשבו את הגבולות הבאים:

.1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}.$$

פתרון: במסלול $x=0$ נקבל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y} = \frac{-2y}{-3y} = \frac{2}{3}$$

במסלול $y=0$ נקבל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

הגבולות שונים ולכן הגבול אינו קיים.

.2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

פתרון: תחילה נראה פתרון לא נכון ונסביר מדוע אינו עובד. ראשית, אם נוכיח ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = 0$$

אז נקבל ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

אבל מתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|\left|\frac{x^2}{x^2}\right| = 0$$
$$\leq \lim_{(x,y,z)}|z| = 0$$

הדרך כמעט נכונה, אמנם התעלמנו מהמקרה של המסלול $x=0$ ובמקרה הנ"ל האי־שוויון לא מוגדר. אבל אם $x=0$ הביטוי הינו 0 זהותית ולכן שואף ל 0. כלמר הטיעון

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 0$$

עדיין נכון, אמנם ההצדקה שונה. נשים לב שבעזרת קואורדינטות פולריות הבעיה בכלל לא מתעוררת.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

3. חשבו את הגבולות החוזרים ואת של הפונקציה $\frac{xy}{x^2+y^2}$ ב $(0,0)$. נקבל

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$
$$.\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

לעומת זאת נשים לב בסמסלול התקרבות $x=y$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

כלמר, הגבול לא קיים.

שאלה 1.2 הוכיחו שכל נורמה $\|\cdot\|$ ב $\mathbb{R}^n$ רציפה ביחס לנורמה הסטנדרטית.

פתרון: ראשית, נשים לב ששלושת הנורמות: נורמת 1, הנורמה הסטנדרטית ונורמת מקסימום הן שקולות. לכן, מספיק להוכיח רציפות ביחס לאחת מהן. יהי $x \in \mathbb{R}^n$. יהי $0 < \epsilon$. נוכיח שקיימת סביבה פתוחה N_x כך שלכל $x \in N_x$ מתקיים $\|x-y\| < \epsilon$. נשים לב שקיים δ כך ש $\|(0,\ldots,a_i,\ldots 0)\| < \frac{\epsilon}{n}$ לכל $1 \leq i \leq n$ ו $a_i \leq \delta$. זה נובע מתכונת הכפל בסקלר. ניקח את הוקטור e_i (1 במקום ה i ו 0 בשאר המקומות) ונכפיל אותו בסקלר מספיק קטן. לכל $y \in (x_1-\delta, x_1+\delta)\times\cdots\times(x_n-\delta,x_n+\delta)$ מתקיים, לפי אי־שוויו המשולש

$$\|(x-y)\| \leq \|(x_1-y_1,\ldots,0)\| + \cdots + \|(0,\ldots x_n-y_n)\|$$
$$< \|\delta e_1\| + \cdots + \|\delta e_n\| < \frac{\epsilon}{n} + \cdots + \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

ולכן הנורמה רציפה.

שאלה 1.3 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נגדיר $\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$. הרא ש $\mathbf{1_A}$ אינה רציפה ב x אם ורק אם $x \in \partial A$.

פתרון: נניח ש $x \in \partial A$. אזי לכל סביבה של x יש נק' ב A וב A^c. במלים אחרות, ל $\mathbf{1_A}$ אין גבול ב x על פי הקריטריון של היינה. עכשו נניח ש $x \notin \partial A$. אזי $x \in A \setminus \partial A$ וקיימת סביבה של x, $N_x \subseteq A$. לכל $a \in N_x$ מתקיים $\mathbf{1}_A(a) = 1$ ולכן לכל $0 < \epsilon$ מתקיים $f(N_x) \subseteq B(f(a), \epsilon)$ ולכן f רציפה ב A. אותו טיעון עובד אם $x \in A \setminus \partial A$, אם נחליף 1 ב 0.

שאלה 1.4 ענו על השאלות הבאות.

1. האם קיימת פונקציה רציפה ועל מהקטע $(-1,1)$ל $\mathbb{R}$?
2. האם קיימת פונקציה רציפה ועל מהקטע $[-1,1]$ ל $\mathbb{R}$?
3. האם קיימת פונקציה רציפה ועל מ $[-1,1] \times [-1,1]$ ל $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
4. האם קיימת פונקציה רציפה מ $(-1,1) \times (-1,1)$ ל $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
5. האם קיימת פונקציה רציפה והפיכה מ $[0,1)$ ל $\mathbb{R}$?

פתרון:

1. ניקח למשל $f(x) = \tan \frac{\pi}{2} x$. f היא רציפה כמנה של שתי רציפות שמכנה שלה לא מתאפס וברור שהטווח שלה הוא $(-\infty, \infty)$. נשים לב, שזאת למעשה פונקציה חד־חד ערכית, על רציפה ואפילה גזירה מ $(-1,1)$ ל $\mathbb{R}$ בעלת הופכית עם אותן תכונות. ולכן כל שאלה על רציפות ל $\mathbb{R}$ שקולה לשאלה על רציפות וקטע פתוח.
2. לא. נניח בשלילה שקיימת f כזו. התמונה של f קומפקטית, אבל $\mathbb{R}$ אינה קומפקטית.
3. לא, מאותה סיבה כמו בסעיף הקודם.
4. כמו 1.
5. לא. נניח שקיימת f כזו. אזי $(0,1) = [0,1) \setminus \{0\}$ קשירה ולכן $f[(0,1)] = f[[0,1)] \setminus \{f(0)\}$ קשירה. אבל לכל $x \in \mathbb{R}$, הקבוצה $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ אינה קשירה.

שאלה 1.5 תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ויהי $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. נניח ש $f : (x_0, y)$ רציפה ב y ו $f(x, y_0)$ רציפה ב x. האם f רציפה ב (x_0, y_0)?

תשובה: לא. ניקח ב $\frac{xy}{x^2+y^2}$ ב $(0,0)$.

שאלה 1.6 נניח ש $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ רציפה לפי x לכל $y_0 \in \mathbb{R}$ ומקיימת את תנאי לפשיץ לפי y. האם f רציפה?

פתרון: כן. יהיו $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. נראה שלכל $\epsilon > 0$ קיימת סביבה N של (x_0, y_0) כך ש $f(N) \subseteq B((x_0, y_0), \epsilon)$.