אינפי 4 תרגול 3

15 באפריל 2015

<u>תזכורת:</u>

תבנית דיפרנציאלית היא פונקציה מהצורה:

$$\omega(\underline{x}) = w_1(\underline{x})dx_1 + \ldots + w_n(\underline{x})dx_n$$

תבנית נקראת מדוייקת אם קיימת פונקציה סקלרית f כך ש: $df = \omega$, כלומר קיימת פונקציה שהתבנית היא הדיפרנציאל שלה.

תבנית נקראת סגורה אם לכל $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

*כל תבנית מדוייקת היא סגורה.

בהמשך ננסח, בתנאים מסויימים, משפט הפוך.

כמה הגדרות:

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום כלשהו.

1. D נקרא קשיר מסילתית (אהלן אינפי 3) אם בין כל שתי נקודות בו אפשר להעביר מסילה.

כלומר, לכל $x_1, x_2 \in D$ קיימת $\gamma : [0,1] \to D$ כך ש: $\gamma(0) = x_1$ וגם $\gamma(1) = x_2$.

2. D נקרא פשוט קשר אם הוא קשיר מסילתית, ואין בתוכו עקומה סגורה המקיפה נקודות שאינן שייכות לו.

לשון אחר, תחום פשוט קשר הוא תחום קשיר בלי "חורים".

3. D נקרא כוכבי, אם קיימת $z \in D$ כך שלכל $x \in D$ הקטע בין שתי הנקודות נמצא בתוך D, כלומר:

$$\{z + t(x - z) | t \in [0,1]\} \subseteq D$$

4. D נקרא קמור אם לכל שתי נקודות הקטע ביניהן נמצא בתוכו, כלומר לכל $x,z\in D$,

$$\{z+t(x-z)|t\in[0,1]\}\subseteq D$$

כעת, ננסח את למת פואנקרה:

בתחום כוכבי, תבנית דיפרנציאלית היא מדוייקת אם ורק אם היא סגורה.

אינטגרל מסילתי מסוג שני:

אינטגרל קווי/מסילתי של תבנית/פונקציה וקטורית/שדה וקטורי $\omega=(w_1,\dots w_n)$ לאורך מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מחושב על ידי:

$$\int\limits_\gamma \omega d\underline{x}=\int\limits_a^b \omega(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

כאשר הנקודה מסמלת מכפלה סקלרית בין שני וקטורים.

בניגוד לאינטגרל מסוג ראשון, שם הפונקציה הייתה סקלרית, כאן הפונקציה שלנו וקטורית. לכן, באינטגרל מסוג ראשון כפלנו בנורמה של וקטור הנגזרות של המסילה, כדי לקבל בסך הכל סקלר בתור אינטגראנד. באינטגרל מסוג שני הפוקנציה וקטורית, ולכן אנו פשוט מבצעים מכפלה סקלרית בין שני הוקטורים, כדי לקבל סקלר. שימו לב שכעת כיוונה של המסילה חשוב לנו.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \omega d\underline{x}$ עבור $\omega(x,y)=(x-2y,x+2y)$ לאורך מסילה שמוגדרת ע"י $x^2+y^2=1, y\geq 0$ מהנקודה $(1,0)$ עד לנקודה $(-1,0)$ נגד כיוון השעון.

*ככלל, נגד כיוון השעון זה הכיוון ה"טבעי".

<u>פתרון:</u>

ההצגה הפרמטרית של המסילה שלנו היא:

$$\gamma(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,\pi]$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_\gamma \omega d\underline{x}=\int\limits_0^\pi(\cos t-2\sin t,\cos t+2\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)dt=$$

$$\int\limits_0^\pi(-\sin t\cos t+2\sin^2 t+\cos^2 t+2\sin t\cos t)dt=\int\limits_0^\pi(1+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1-\cos 2t}{2})dt$$

$$\left(t-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)|_0^\pi=\frac{3\pi}{2}$$

לאורך הדרך השתמשנו בזהויות של זווית כפולה וכמובן בזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
לא מסובך.

משפט:

תבנית ω היא מדוייקת אם ורק אם האינטגרל $\int_C \omega d\underline{x}$ לא תלוי בעקומה C.
יותר מכך, אם C עקומה בין x_1 לבין x_2 ו$-f$ היא הפונקציה המקיימת: $df = \omega$ אז:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = f(x_2) - f(x_1)$$

מסקנה:

אם ω תבנית מדוייקת ו$-C$ עקומה סגורה, אז:

$$\int\limits_C \omega d\underline{x} = 0$$

נדגים זאת.

נחשב את האינטגרל $\int_\gamma \omega d\underline{x}$ עבור התבנית $\omega(x,y) = x^2dx + ydy$ לאורך מסילה שהיא משולש שקודקודיו $(1,0),(1,1),(0,0)$ נגד כיוון השעון.

אם נחשב (בקצרה) את האינטגרל חישוב ישיר, נחלק את האינטגרל לשלושה אינטגרלים, כל אחד על כל צלע.

שלוש הפרמטריזציות של הצלעות הן:

$$\gamma_1(t) = (t,0), t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1,t), t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0,1]$$

האינטגרל לאורך הצלע הראשונה יהיה $\frac{1}{3}$, האינטגרל לאורך הצלע השנייה יהיה $\frac{1}{2}$ והאינטגרל לאורך הצלע השלישית יהיה $-\frac{5}{6}$(מילה שלי).

האינטגרל שלנו, סכום שלושת האינטגרלים, יהיה 0.

מאידך גיסא, המשפט שלנו אומר זאת ללא כחל וסרק!

התבנית שלנו היא מדוייקת (הפונקציה $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ נראית כמועמדת לגיטימית ל$-df = \omega$), המסילה סגורה ולכן לפי המשפט האינטגרל אכן שווה ל-0.

משפט גרין:

תהי C מסילה פשוטה, סגורה, וגזירה למקוטעין, ונסמן ב$-D$ את השטח החסום ע"י C.

אם $Q(x,y), P(x,y)$ פונקציות סקלריות גזירות ברציפות בקבוצה פתוחה Ω המכילה את D אזי:

$$\int\limits_C (Pdx + Qdy) = \iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

איך יכול להיות שמסילה היא פשוטה (חח"ע) וסגורה ($\gamma(a) = \gamma(b)$)?

כשאנו אומרים שמסילה היא פשוטה וסגורה, אנו מתכוונים לכך שהיא סגורה, ולמעט שני הקצוות היא חח"ע.

משפט גרין מאפשר לנו לעבור לנוחיותינו בין אינטגרל מסילתי מסוג שני לאינטגרל כפול ולהיפך.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את האינטגרל $\int_C Fd\underline{x}$ כאשר $F(x,y) = (e^x - y + x, y^{\frac{3}{2}} + x)$ ו־C היא שפת מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 6.

<u>פתרון:</u>

נתחיל לחשב ללא משפט גרין.

פרמטריזציה של המסילה היא $\gamma(t) = (6\cos t, 6\sin t), t \in [0, 2\pi]$. לכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int\limits_C Fd\underline{x} = \int\limits_0^{2\pi} (e^{6\cos t} - 6\sin t + 6\cos t, 6\sin^{\frac{3}{2}} t + 6\cos t) \cdot (-6\sin t, 6\cos t)dt =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (-6\sin t e^{6\cos t} + 36\sin^2 t - 36\sin t\cos t + 36\sin^{\frac{3}{2}} t\cos t + 36\cos^2 t)dt$$

וזה לא קשה במיוחד אך גם לא נורא כיפי.

אם כן, נשתמש במשפט גרין. הפונקציות P, Q שלנו הן:

$$P(x,y) = e^x - y + x \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$Q(x,y) = y^{\frac{3}{2}} + x \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

ולפי משפט גרין (שימו לב שתנאי המשפט אכן מתקיימים):

$$\int\limits_C Fd\underline{x} = \iint\limits_D (1 - (-1))dxdy = 2\iint\limits_D dxdy$$

אינטגרל כפול של 1 על תחום מחשב את שטחו. שטח המעגל שלנו הוא 36π, ובסה"כ נקבל:

$$\int\limits_C F d\underline{x} = 2 \cdot 36\pi = 72\pi$$

בתרגיל האחרון השתמשנו במשפט גרין כדי לעבור מאינטגרל מסילתי לאינטגרל כפול.
במקרים אחרים נרצה לעשות את המעבר בכיוון ההפוך. למשל, כשנרצה לחשב שטחים.
כפי שהזכרנו, שטח של תחום D ניתן לחישוב על ידי האינטגרל $\iint_D dxdy$. כדי להשתמש במשפט גרין אנחנו צריכים פונקציות P, Q שמצד אחד אכן תקיימנה:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

ומצד שני שתהיינה פשוטות יחסית כדי שנוכל לחשב את האינטגרל המסילתי בקלות (אחרת אין טעם לעבור לאינטגרל מסילתי).
דוגמאות לתבניות $Pdx + Qdy$ כאלה הן:

$$\int\limits_\gamma xdy, \int\limits_\gamma -ydx, \int\limits_\gamma \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$$

וכמובן אפשר לחשוב על תבניות נוספות. נבחר את אחת מהתבניות לפי מורכבות החישוב לפי כל אחת מהן.

<u>תרגיל:</u>

נמצא את השטח הכלוא על ידי גרף האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>פתרון:</u>

ראשית נזכור ששטח האליפסה הוא $ab\pi$. לשם אנו רוצים להגיע.
פרמטריזציה של האליפסה היא:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

נשתמש בצורה $\int_\gamma \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$. אם כן, לפי משפט גרין:

$$S = \iint\limits_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_\gamma -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(-b\sin t, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)dt = ab\pi$$