היטל **הרצאה 18** **27.12.2015**

תהליך גראם שמידט נכתב על ידי יהונתן רגב

הגדרה

יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית.

יהי $W \subset V$ תת מרחב, $k = dimW$. יהי $S = \{w_1, \cdots, w_k\}$ בסיס אורתוגונלי של W.

נגדיר, לכל $v \in V$: $\pi_S(v) = \frac{<v,w_1>}{<w_1,w_1>} \cdot w_1 + \cdots + \frac{<v,w_k>}{<w_k,w_k>} \cdot w_k$.

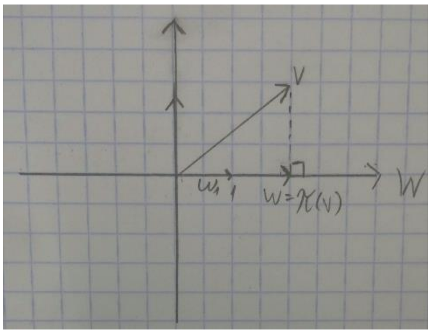
אומרים ש - $w = \pi_S(v)$ הוא **ההיטל** של v על W.

דוגמה

$V = \mathbb{R}^2$

$W = \mathbb{R}^1$ (ציר x).

יהי $w_1 \in W$ וקטור חידה.



$S = \{w_1\}$.

$$\pi_S(v) = \frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 = \frac{\alpha_1}{1} \cdot w_1 = \alpha_1 \cdot w_1$$

תכונות של היטל

1. $\pi_S(v) = v \Leftrightarrow v \in W$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח ש - $\pi_S(v) = v$.

נוכיח ש - $v \in W$.

אבל, לפי הבנייה, $\pi_S(v) \in W$, לכן: $v \in W$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח ש - $v \in W$.

נוכיח ש - $\pi_S(v) = v$.

קודם, נניח ש - $v \in S$. ז״א, $(1 \le i \le k)$, $v = w_i$.

$$\pi_S(w_i) = \overbrace{\frac{< w_i, w_1 >}{< w_1, w_1 >}}^{=0} \cdot w_1 + \cdots + \frac{< w_i, w_i >}{< w_i, w_i >} \cdot w_i + \cdots + \overbrace{\frac{< w_i, w_k >}{< w_k, w_k >}}^{=0} \cdot w_k = w_i$$
$$= v$$

נוכיח ש - $\pi_S: V \to W$ היא העתקה לינארית.

$$\pi_S(\alpha \cdot v + \alpha' \cdot v')$$
$$= \frac{< \alpha \cdot v + \alpha' \cdot v', w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 + \cdots + \frac{< \alpha \cdot v + \alpha' \cdot v', w_k >}{< w_k, w_k >} \cdot w_k$$

$$= \alpha \cdot \frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 + \alpha' \cdot \frac{< v', w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 + \cdots + \alpha \cdot \frac{< v, w_k >}{< w_k, w_k >} \cdot w_k + \alpha' \cdot \frac{< v', w_k >}{< w_k, w_k >} \cdot w_k$$

$$\pi_S(\alpha \cdot v + \alpha' \cdot v') = \alpha \cdot \pi_S(v) + \alpha' \cdot \pi_S(v')$$

לכן, לכל v, $v = \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_k \cdot w_k$, נקבל:

$$\pi_S(v) = \pi_S(\alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_k \cdot w_k) = \alpha_1 \cdot \pi_S(w_1) + \cdots_{\alpha_k} \cdot \pi_S(w_k)$$

$$\pi_S(v) = \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots \alpha_k \cdot w_k = v$$

$\blacksquare$.

2. נסמן: $z = v - \pi_S(v)$.

אזי: $z \in W^\perp$.

הוכחה

$W = span(S)$, וכן: $W^\perp = \left(span(S)\right)^\perp = S^\perp$. לכן, מספיק לבדוק ש:

$< z, w_i > = 0$, לכל: $i = 1, \cdots, k$.

$$< z, w_i > = < v - \pi_S(v), w_i >$$

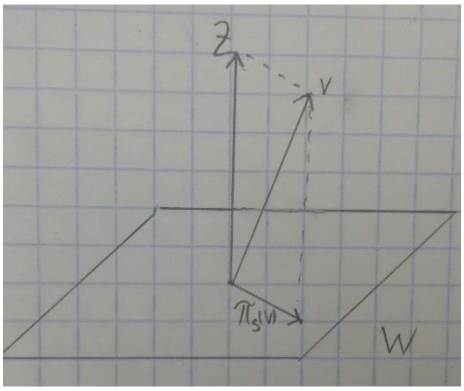
$$< z, w_i > = < v, w_i > \; - < \pi_S(v), w_i >$$

$$< z, w_i > = < v, w_i > \; - < \left(\frac{< v, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 + \cdots + \frac{< v, w_i >}{< w_i, w_i >} \cdot w_i + \cdots + \frac{< v, w_1 >}{< w_k, w_k >} \cdot w_k\right), w_i >$$

$$< z, w_i > = < v, w_i > - \frac{< v, w_i >}{< w_i, w_i >} \cdot < w_i, w_i > = 0$$

■

המחשה



תהליך גראם שמידט

נתונים: יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית. B בסיס כלשהו של V.

נרצה: לקבל מ – B בסיס אורתונורמלי של V.

בשלב הראשון, נקבל מ – B בסיס אורתוגונלי $\tilde{B}$: $\tilde{B} = \{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_k}\}$, ואחר ננרמל אותו כדי לקבל בסיס אורתונורמלי.

נגדיר: $\widetilde{v_1} = v_1$.

$S = \{\widetilde{v_1}\}$.

זהו בסיס אורתוגונלי של $W = span(S)$. ($v_1 \neq 0$, שכן B בלתי תלויה לינארית).

ננמק לפי אינדוקציה:

נניח שקיים בסיס אורתוגונלי $S_i = \{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_i}\}$ של $W_i = span(S_i)$.

נבנה v_{i+1} כל ש - $S_{i+1} = \{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_i}, \widetilde{v_{i+1}}\}$ בסיס אורתוגונלי של $W_{i+1} = span(S_{i+1})$.

נגדיר $\widetilde{v_{i+1}}$ ע"י הנוסחה הבאה:

$$\widetilde{v_{i+1}} = v_{i+1} - \pi_{S_i}(v_{i+1})$$

לפי הבנייה, $\widetilde{v_{i+1}} \in W_i^{\perp}$. לכן, $v_{i+1} \in S_i^{\perp}$, ז"א, הקבוצה: $S_{i+1} = \{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_i}, \widetilde{v_{i+1}}\}$ היא קבוצה אורתוגונלית.

צריך לבדוק ש - $0 \notin S_{i+1}$.

$\widetilde{v_i} \neq 0 \wedge \cdots \wedge \widetilde{v_1} \neq 0$ שכן S_i בלתי תלויה לינארית.

לכן, מספיק לבדוק ש - $\widetilde{v_{i+1}} \neq 0$, או, במילים אחרות, ש - $v_{i+1} \neq \pi_{S_i}(v_{i+1})$.

נניח בשלילה ש - $v_{i+1} \neq \pi_{S_i}(v_{i+1})$.

זה יתכן אם ורק אם $v_{i+1} \in W_i$.

נציין ש - $v_{i+1} \notin span\{v_1, \cdots, v_i\}$, שכן הקבוצה: $\{v_1, \cdots, v_i, v_{i+1}\}$ בלתי תלויה לינארית כחלק מבסיס.

לכן, מספיק להוכיח ש - $\overbrace{span\{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_i}\}}^{W_i} = span\{v_1, \cdots, v_i\}$.

נוכיח את השוויון באינדוקציה:

<u>בסיס</u>: $i = 1$.

$v_1 = \widetilde{v_1}$, לכן: $span\{v_1\} = span\{\widetilde{v_1}\}$.

<u>צעד</u>: נניח נכונות הטענה עבור i, ונוכיח נכונות הטענה עבור $i + 1$.

כלומר, נניח ש - $span\{v_1, \cdots, v_i\} = span\{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_i}\}$.

$$\widetilde{v_i} = v_i - \overbrace{\pi_{S_{i-1}}(v_i)}^{\in W_{i-1}=span\{\widetilde{v_1},\cdots,\widetilde{v_{i-1}}\}=span\{v_1,\cdots,v_{i-1}\}}$$

לכן, $v_i \in span\{v_i, W_{i-1}\} \subset span\{v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i\}$.

להפך, $v_i = \widetilde{v_i} + \pi_{S_{i-1}}(v_i) \in span\{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_{i-1}}, \widetilde{v_i}\}$.

הוכחנו ש - S_{i+1} בסיס אורתוגונלי של W_{i+1}.

בצעד ה $- n$, נגיע ל - $W_n = V$, ולבסיס $S_n = \{\widetilde{v_1}, \cdots, \widetilde{v_n}\}$ אורתוגונלי של V.

■

המחשה