פתרון תרגיל 10 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

24 במאי 2016

1. אנו יודעים שמתקיים היחס: $W=-G^{-1}B$, כלומר:

$$L_{ij}=-L_j^m g_{mi}$$

מכיוון שהפרמטריזציה איזותרמית:

$$L_{ij}=-L_j^m f^2\delta_{mi}=-f^2L_j^i$$

ואם כן:

$$L_1^1=-\frac{L_{11}}{f^2},L_2^2=-\frac{L_{22}}{f^2}$$

מכיוון ש: $H=\frac{L_1^1+L_2^2}{2}$, אפשר לכתוב:

$$H=-\frac{L_{11}+L_{22}}{2f^2}$$

כעת, $g_{12}=g_{21}=0$ כלומר $x_1\cdot x_2=0$. נגזור לפי המשתנה השני; לפי כלל לייבניץ:

$$x_{12}\cdot x_2+x_1\cdot x_{22}=0$$

כלומר $x_{12}\cdot x_2=-x_1\cdot x_{22}$.

כמו כן, מכיוון שהפרמטריזציה איזותרמית:

$$g_{11}=g_{22}=x_1\cdot x_1=x_2\cdot x_2=f^2$$

ואם נגזור את השוויון הזה לפי כלל לייבניץ, נקבל:

$$2\left(x_{11}\cdot x_1\right)=2\left(x_{12}\cdot x_2\right)$$

נציב $x_{12}\cdot x_2=-x_1\cdot x_{22}$, נחלק ב$-2$, נעביר אגף ונקבל:

$$x_{11}\cdot x_1+x_1\cdot x_{22}=0$$

כלומר:

$$x_1 \cdot (x_{11} + x_{22}) = 0$$

כלומר $\Delta(\underline{x}) = x_{11} + x_{22}$ מאונך ל־x_1.

באופן דומה אפשר להראות ש־$x_{11} + x_{22}$ מאונך גם ל־x_2.

הוקטורים $\{x_1, x_2, \vec{n}\}$ פורשים את המרחב. $\vec{n}$ מאונך גם הוא ל־x_1, x_2 ולכן הוא פרופורציונלי ל־$x_{11} + x_{22}$:

$$\Delta(\underline{x}) = c\vec{n}$$

עבור $c \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו.

כעת:

$$c = \Delta(\underline{x}) \cdot \vec{n} = (x_{11} + x_{22}) \cdot \vec{n}$$

אנו יודעים שמתקיים:

$$x_{11} = \Gamma^1_{11}x_1 + \Gamma^2_{11}x_2 + L_{11}\vec{n}, x_{22} = \Gamma^1_{22}x_1 + \Gamma^2_{22}x_2 + L_{22}\vec{n}$$

נציב זאת במשוואה, ומכיוון ש: $x_1 \cdot \vec{n} = x_2 \cdot \vec{n} = 0$ וגם $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, נקבל מליניאריות המכפלה הפנימית:

$$c = (x_{11} + x_{22}) \cdot \vec{n} = L_{11} + L_{22} = -2Hf^2$$

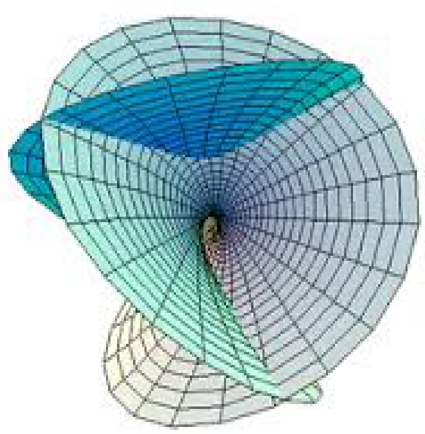
ולכן:

$$\Delta(\underline{x}) = c\vec{n} = -2Hf^2\vec{n}$$

כנדרש.

2. נראה שאכן $H = 0$.

(א) המשטח נראה כך:



וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = \left(1-u^2+v^2, 2vu, 2u\right), r_v = \left(2uv, 1-v^2+u^2, -2v\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-u^2+v^2 & 2vu & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} = \left(1+u^2+v^2\right)\cdot\left(-2u, 2v, \left(1-u^2-v^2\right)\right)$$

ננרמל:

$$\|r_u \times r_v\| = \left(1+u^2+v^2\right)\cdot\sqrt{4u^2+4v^2+\left(1-u^2-v^2\right)^2} = \left(1+u^2+v^2\right)^2$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\left(1+u^2+v^2\right)}\left(-2u, 2v, \left(1-u^2-v^2\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = (-2u, 2v, -2), r_{uv} = (2v, 2u, 0), r_{vv} = (2u, -2v, -2)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = r_u \cdot r_u = \left(1+u^2+v^2\right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_v = 0$$

$$g_{22} = r_v \cdot r_v = \left(1+u^2+v^2\right)^2$$

איברי התבנית היסודית השנייה הם:

$$L_{11} = r_{uu} \cdot \vec{n} = 2$$

$$L_{12} = L_{21} = r_{uv} \cdot \vec{n} = 0$$

$$L_{22} = r_{vv} \cdot \vec{n} = -2$$

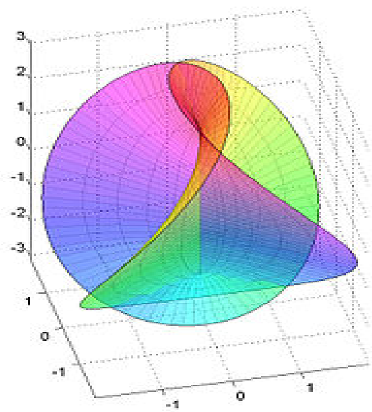
נזכור ש: $W = -G^{-1}B$, ולכן:

$$W = -\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$H=\frac{1}{2}trW=0$$

(ב) המשטח נראה כך:



בדקו שהפרמטריזציה איזותרמית.
נחשב את הלפלסיאן.

$$r_1\left(u,v\right)=2\cos v\sinh u-\frac{2}{3}\cos 3v\sinh 3u$$

מתקיים:

$$\left(r_1\right)_{uu}=2\cos v\sinh u-6\cos 3v\sinh 3u,\left(r_1\right)_{vv}=-2\cos v\sinh u+6\cos 3v\sinh 3u$$

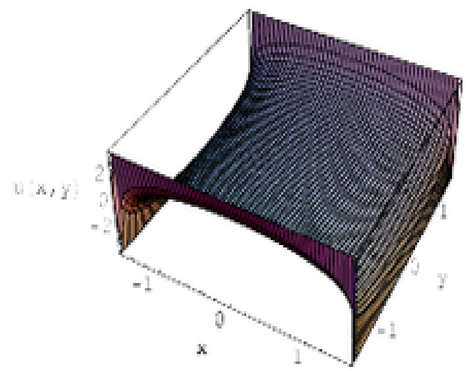
ואכן $\Delta\left(r_1\right)=0$.
באופן דומה, עבור:

$$r_2\left(u,v\right)=2\sin v\sinh u-\frac{2}{3}\sin 3v\sinh 3u$$

$$r_3\left(u,v\right)=2\cos 2v\cosh 2u$$

וקל לראות שאכן: $\Delta\left(r_2\right)=\Delta\left(r_3\right)=0$.
לכן $\Delta\left(r\right)=0$.
מכיוון שהקואורדינטות איזותרמיות, זה מספיק לכך שאכן $H=0$.

(ג) המשטח נראה כך:



וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (1, 0, -\tan u), r_v = (0, 1, \tan v)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\tan u \\ 0 & 1 & \tan v \end{vmatrix} = (\tan u, -\tan v, 1)$$

ננרמל:

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 u + \tan^2 v + 1}} (\tan u, -\tan v, 1)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = \left(0, 0, -\frac{1}{\cos^2 u}\right), r_{uv} = 0, r_{vv} = \left(0, 0, \frac{1}{\cos^2 v}\right)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = r_u \cdot r_u = 1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_v = -\tan u \tan v$$

$$g_{22} = r_v \cdot r_v = 1 + \tan^2 v = \frac{1}{\cos^2 v}$$

איברי התבנית היסודית השנייה הם:

$$L_{11}=r_{uu}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{\cos^2 u\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}$$

$$L_{12}=L_{21}=r_{uv}\cdot\vec{n}=0$$

$$L_{22}=r_{vv}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\cos^2 v\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}$$

כעת:

$$G=\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2 u} & -\tan u\tan v\\ -\tan u\tan v & \frac{1}{\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$G^{-1}=\left(\frac{1-\sin^2 u\sin^2 v}{\cos^2 u\cos^2 v}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos^2 v} & \tan u\tan v\\ \tan u\tan v & \frac{1}{\cos^2 u}\end{pmatrix}$$

בנוסף:

$$B=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cos^2 u} & 0\\ 0 & \frac{1}{\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

נזכור ש: $W=-G^{-1}B$, כלומר:

$$W=\frac{\sin^2 u\sin^2 v-1}{\cos^2 u\cos^2 v\sqrt{\tan^2 u+\tan^2 v+1}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v} & \frac{\tan u\tan v}{\cos^2 v}\\ -\frac{\tan u\tan v}{\cos^2 u} & \frac{1}{\cos^2 u\cos^2 v}\end{pmatrix}$$

כלומר:

$$H=\frac{1}{2}trW=0$$

3. נשתמש במשפט המפתיע ובאופרטור לפלס־בלטרמי.
מקדמי כריסטופל של המשטח הם:

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11}=\tfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\tfrac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=0\\ \Gamma^1_{12}=\tfrac{1}{2}g^{11}\left(g_{12,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\tfrac{1}{2}g^{12}\left(\ldots\right)=-\tfrac{1}{y}\\ \Gamma^1_{21}=-\tfrac{1}{y}\\ \Gamma^1_{22}=0\\ \Gamma^2_{11}=\tfrac{1}{y}\\ \Gamma^2_{12}=0\\ \Gamma^2_{21}=0\\ \Gamma^2_{22}=-\tfrac{1}{y}\end{gathered}$$

ולכן לפי המשפט המפתיע:

$$K=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11,2}^{2}-\Gamma_{12,1}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\right)$$

אצלנו:

$$K=y^{2}\cdot\left(-\frac{1}{y^{2}}-0-\frac{1}{y^{2}}+0+\frac{1}{y^{2}}+0\right)=-1$$

נשתמש באופרטור לפלס־בלטרמי.
אצלנו, $\lambda=\frac{1}{y^{2}}=y^{-2}$. לכן:

$$K=-\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\lambda\right)=\Delta_{LB}\left(\ln y\right)=\frac{1}{\lambda}\Delta\left(\ln y\right)=$$

כעת, $\Delta=\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}$, ולכן:

$$=y^{2}\cdot\left(\frac{\partial^{2}\left(\ln y\right)}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\left(\ln y\right)}{\partial y^{2}}\right)=y^{2}\cdot\left(-\frac{1}{y^{2}}\right)=-1$$

4. שאלות מסוג זה מופיעות דרך קבע במבחנים.

(א) כמו שאנו יודעים, ארבע השיטות הן:

i. $K=\det\left(L_{j}^{i}\right)=\det W$.

ii. $K=-\frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})}=\det W$.

למה אנו מתייחסים אליהן כאל שתי שיטות שונות? כי את W אפשר לחשב בשתי דרכים שונות (ישירות או בעזרת התבניות היסודיות הראשונה והשנייה).

iii. המשפט המפתיע.

iv. אופרטור לפלס־בלטרמי.

(ב) בשביל השיטות הראשונה והשנייה אנו זקוקים לפרמטריזציה במפורש, וזו אינה נתונה לנו. לכן, בדומה לשאלה הקודמת, אפשר להשתמש במפשט המפתיע או באופרטור לפלס־בלטרמי.

(ג) נשתמש באופרטור לפלס בלטרמי.
אצלנו: $\lambda=\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)^{-2}$. לכן:

$$K=-\frac{1}{2}\Delta_{LB}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)^{-2}\right)=\Delta_{LB}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\lambda}\Delta\left(\ln y\right)=\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)^{2}\Delta\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)\right)=$$

נחשב את הלפלסיאן:

$$\Delta\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)\right)=\frac{4\rho\left(4+\rho x^2+\rho y^2\right)-4\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(4+\rho x^2+\rho y^2\right)^2}$$

כלומר:

$$\Delta\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)\right)=\frac{\rho}{\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^2}$$

ולכן:

$$K=\rho$$