תרגילי חזרה לבמחן

משפט גאוס בונה

א. מאפיין אוילר $\chi(M)$ של משטח M הוא

$$\chi(M) = V - E + F$$

באשר V, E, F הם בהתאמה מספר הקודקודים, צלעות ופיאות של M לאחר שמחלקים אותו למשולשים.

אם המשטח אוריינטבילי מתקיים $\chi(M) = 2 - 2g$ באשר g הוא ה־ $genus$ של המשטח (מספר החורים או ה"ידיות" שבו).

ב. משפט גאוס בונה: תהי $K_p = K(u^1, u^2)$ עקמומיות גאוס בנקודה $p = x(u^1, u^2)$. אז

$$\int_M K_p dA_M = 2\pi\chi(M)$$

תרגיל 3 חשבו את

$$\int_M K_p dA_M$$

עבור הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ בשתי דרכים:

א. ע"י חישוב ישיר.

ב. ע"י משפט גאוס בונה.

פתרון 3

א. פרמטריזציה

$$x(\theta, \phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$$

כפי שכבר ראינו בעבר עקמומיות גאוס של ספירה בכל נקודה היא $\frac{1}{r^2}$.

כלומר

$$\int_M K_p dA_M = \int_M \frac{1}{r^2} dA_M = \frac{1}{r^2}\overbrace{\int_M dA_M}^{4\pi r^2} = 4\pi$$

ב. לספירה

$$g = 0$$

כלומר

$$\chi = 2 - 2\cdot 0 = 2$$

כלומר לפי משפט גאוס בונה $\int_M K_p dA_M = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

תרגיל 4 עבור הטורוס שהוא משטח הסיבוב של העקומה

$$\alpha(\phi) = (a + b\cos\phi, 0, b\sin\phi)$$

באשר $b < a$, חשבו את

$$\int_M K_p dA_M$$

בשתי דרכים:

א. ע"י חישוב ישיר.

ב. ע"י משפט גאוס בונה.

פתרון 4

א. עקמומיות גאוס של הטורוס

$$K = \frac{\cos\phi}{a(a\cos\phi + b)}$$

אלמנט השטח

$$dA_M = \sqrt{|(g_{ij})|} = \sqrt{\begin{vmatrix} (a\cos\phi + b)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix}}$$

$$= b(a\cos\phi + b)$$

לכן

$$\int_M K_p dA_M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi}{a(a\cos\phi + b)} b(a\cos\phi + b) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b}{a}\cos\phi d\phi d\theta = 0$$

ב. לטורוס "חור" אחד כלומר

$$g = 1$$

כלומר

$$\chi(M) = 0$$

לכן לפי משפט גאוס בונה

$$\int_M K_p dA_M = 0$$

התבנית היסודית הראשונה, השנייה, עקמומיות גאוס ועקמומיות הממוצעת

תרגיל 3 נסתכל על משטח הסיבוב המתקבל ע"י סיבוב של הפרבולה $x = z^2 + \frac{1}{4}$ מסביב לציר z.

א. מיצאו את התבנית היסודית הראשונה.

ב. מיצאו את התבנית היסודית השניה.

ג. מיצאו את מקדמי העתקת ווינגרטן $\left(L^i{}_j\right)$.

ד. מיצאו את עקמומיות גאוס K ואת עקמומיות ממוצעת H.

פתרון 3

א. משטח סיבוב של $(r(\phi), 0, z(\phi)) = \left(\phi^2 + \frac{1}{4}, 0, \phi\right)$:

$$x(\theta, \phi) = \left(\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)\cos\theta, \left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)\sin\theta, \phi\right)$$

מטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)^2 & 0 \\ 0 & 4\phi^2 + 1 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{cases} x_1 = \left(-\sin\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), \cos\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), 0\right) \\ x_2 = (2\phi\cos\theta, 2\phi\sin\theta, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = \left(-\cos\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), -\sin\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), 0\right) \\ x_{12} = (-2\phi\sin\theta, 2\phi\cos\theta, 0) \\ x_{22} = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) \end{cases}$$

כעת,

$$x_1 \times x_2 = \left(\cos\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), \sin\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), -2\phi\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)\right)$$

וקטור זה מקביל ל- $(\cos\theta, \sin\theta, -2\phi)$ לכן הנורמל הוא

$$n = \left(1 + 4\phi^2\right)^{-\frac{1}{2}}(\cos\theta, \sin\theta, -2\phi).$$

כלומר

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n\rangle & \langle x_{12}, n\rangle \\ \langle x_{12}, n\rangle & \langle x_{22}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

ג. כזכור $L^i{}_j = -g^{ik}L_{kj}$. אצלנו

$$(L^i{}_j) = -\begin{pmatrix} (\phi^2+\frac{1}{4})^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(\phi^2+\frac{1}{4})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\phi^2+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\phi^2+\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\phi^2+\frac{1}{4})^{\frac{-3}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4}(\phi^2+\frac{1}{4})^{\frac{-3}{2}} \end{pmatrix}$$

ד.

$$K = \left(\frac{1}{2}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\right)\left(\frac{-1}{4}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{-1}{8}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{-3}$$
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}} - \frac{1}{4}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{1}{8}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}$$

תרגיל 2 נסתכל על החרוט $x(u^1,u^2) = (u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, u^2)$ עבור $u^2 > 0$.

א. מיצאו את וקטור הנורמל בכל נקודה.

ב. מיצאו את מקדמי $L^i{}_j$ של העתקת ווינגרטן.

ג. מיצאו עקמומיות גאוס.

פתרון 2

א.

$$x_1 = (-u^2\sin u^1, u^2\cos u^1, 0)$$
$$x_2 = (\cos u^1, \sin u^1, 1)$$
$$|x_1\times x_2| = \left|(u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, -u^2)\right| = \sqrt{2}u^2$$
$$n = \frac{(u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, -u^2)}{\sqrt{2}u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u^1, \sin u^1, -1)$$

ב. נחשב את $\frac{\partial n}{\partial u^2}, \frac{\partial n}{\partial u^1}$:

$$\frac{\partial n}{\partial u^1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin u^1, \cos u^1, 0)$$
$$\frac{\partial n}{\partial u^2} = \vec{0}$$

כלומר בהנתן $v = v^i x_i$ מתקיים

$$\begin{aligned} W_p(v^i x_i) &= v^1 \frac{\partial n}{\partial u^1} + v^2 \frac{\partial n}{\partial u^2} \\ &= v^1 \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin u^1, \cos u^1, 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v^1}{u^2} x_1 \end{aligned}$$

בפרט

$$W_p(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2u^2} x_1, \qquad W_p(x_2) = 0,$$

כלומר,

$$(L^i{}_j) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2u^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ג. $K = det(W_p) \equiv 0$.

קווים גיאודזיים

תרגיל 4 נתון המשטח הבא ב- $\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = y^3\right\}$$

הוכיחו שהקו

$$L = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = z = 0\right\}$$

הוא עקומה גיאודזית של M.

פתרון 4 נמצא פרמטריזציה למשטח:

$$x(u^1,u^2)=(u^1,u^2,(u^2)^3)$$

נסתכל על העקומה המישורית

$$\alpha(s)=(s,0)=(\alpha^1(s),\alpha^2(s))$$

מתקיים $\beta(s)=x\circ\alpha(s)=(s,0,0)$ כלומר תמונת β היא אכן הקו L. נשים לב כי זהו קו ישר, לכן בפרט גאודז: אכן, מתקיים $\beta'(s)=(1,0,0)$ לכן $\beta''(s)=(0,0,0)$ ובפרט

$$\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^k+\alpha^{k\prime\prime}=0$$

לכל k, כלומר β עקומה גאודזית, מש"ל. [1]

[1] לשם התרגול נראה זאת גם ישירות, כלומר כך היינו עושים אם לא היינו שמים לב ש- $\beta''(s)=\vec{0}$: מתקיים $\alpha^{1\prime}=1,\quad \alpha^{2\prime}=0,\quad \alpha^{1\prime\prime}=0,\quad \alpha^{2\prime\prime}=0$, כלומר המשוואות הגיאודזיות הן

$$\begin{cases}1^2\Gamma_{11}^1+2\cdot1\cdot0\cdot\Gamma_{12}^1+0^2\Gamma_{22}^1+0=0\\ 1^2\Gamma_{11}^2+2\cdot1\cdot0\cdot\Gamma_{12}^2+0^2\Gamma_{22}^2+0=0\end{cases}$$

כלומר

$$\begin{cases}\Gamma_{11}^1=0\\ \Gamma_{11}^2=0\end{cases}$$

כלומר הקו הישר L הוא עקומה גיאודזית אם ורק אם $\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^2=0$, לכן נשאר רק לחשב מקדמים אלה.
נחשב את המטריקה: $x_1=(1,0,0),\ x_2=(0,1,3(u^2)^2)$ כלומר

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1+9(u^2)^4\end{pmatrix},\quad (g_{ij;1})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad (g_{ij;2})=\begin{pmatrix}0&0\\0&36(u^2)^3\end{pmatrix}$$

כלומר $g_{22;2}=36(u^2)^3$ וכל שאר $g_{ij;k}$ הם 0. לכן

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}\left(\overbrace{g_{11;1}}^{0}-\overbrace{g_{11;1}}^{0}+\overbrace{g_{11;1}}^{0}\right)g^{11}=0$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2}\left(\overbrace{g_{12;1}}^{0}-\overbrace{g_{11;2}}^{0}+\overbrace{g_{12;1}}^{0}\right)g^{22}=0$$

כדרוש.

עקמומיות הכוללת

א. עקומת ז'ורדן במישור היא עקומה מישורית סגורה שלא חותכת את עצמה, כלומר התמונה של העתקה $\alpha:S^1\to\mathbb{R}^2$ שהיא רציפה וחח"ע.

ב. עקומת ז'ורדן חלקה $C\subset\mathbb{R}^2$ נקראת קמורה ממש אם הפנים של כל קטע המחבר שתי נקודות על C מוכל בפנים של C (כלומר בתחום החסום שמובטח ממשפט ז'ורדן).

באופן שקול: בכל נקודה p העקומה כולה, מלבד הנקודה p עצמה, נמצאת מצידו האחד של המשיק T_p.

ג. תהי C עקומה עם פרמטריזצית מהירות יחידה $\alpha(s):[a,b]\to\mathbb{R}^2$. העקמומיות הכוללת של C היא

$$Tot(C)=\int_a^b k_\alpha(s)ds.$$

ד. העקמומיות הכוללת של כל עקומת ז'ורדן חלקה קמורה ממש היא 2π.

תרגיל 5 נתונה עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה

$$.3x^2 + 4xy - 6y^2 = -1$$

מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?

פתרון 5 העקומה היא חתך חרוט. נבין את צורתה:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

כלומר פולינום אופייני

$$(-3-x)(-6-x) - 4 = 0$$

כלומר $\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -7$. לכן אחרי לכסון העקומה מוגדרת ע"י $-2x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ כלומר זו אליפסה. בפרט, זו עקומת ז'ורדן קמורה, לכן העקמומיות הכוללת שלה היא 2π.

4. תהי $\gamma(t) = (\cos t + \cos 2t, \sin t - \sin 2t)$ עקומה $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

(א) חשבו את העקמומיות κ בנקודה $(2,0)$.

(ב) מצאו את משוואת המעגל המשיק בנקודה $(2,0)$.

(ג) חשבו את $\int_\gamma \kappa ds$

פתרון

(א)

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{1}{\sqrt{(\sin t + 2\sin 2t)^2 + (\cos t - 2\cos 2t)^2}} \left(-\sin t - 2\sin 2t \quad \cos t - 2\cos 2t\right) \\
s &= \int \sqrt{(\sin t + 2\sin 2t)^2 + (\cos t - 2\cos 2t)^2} dt \\
&= \int \sqrt{5 + 4(\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t)} dt \\
&= \int \sqrt{5 - 4\cos 3t} dt \\
\hat{T} &= \frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos 3t}} \begin{pmatrix} -\sin t - 2\sin 2t \\ \cos t - 2\cos 2t \end{pmatrix} \\
\gamma(0) &= (2,0) \\
\left\| \dot{T} \right\|_{t=0} &= 5 \\
\kappa &= -5
\end{aligned}$$

(ב) נראה שהוקטור המשיק בנקודה $t=0$ כלומר $(2,0)$ הוא בכיוון $(0,-1)$ וכיוון שמרכז המעגל המשיק בכיוון $\hat{N}$שהוא פה $(-1,0)$אז מרכז המעגל הוא $p =$ $(2,0) + \frac{1}{5}(-1,0) = \left(\frac{9}{5}, 0\right)$ והרדיוס הוא $\left|\frac{1}{\kappa}\right| = \frac{1}{5}$ כלומר:

$$\left(x - \frac{9}{5}\right) + y^2 = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

(ג) ראינו בהרצאה שאינטגרל על κ על עקומה סגורה חלקה הוא מספר ההקפות של הוקטור המשיק סביב ראשית הצירים כפול 2π (סימן ההקפות נחשב).

$$\int_\gamma \kappa ds = (2\pi) \cdot (-2)$$

5. נתון העקום $\gamma(s)$ ב-$\mathbb{R}^2$, הנתון בפרמטריזציה טבעית, המקיים $\gamma(0)=(0,0)\,,\gamma(2)=(1,0)$. הוכיחו: קיימת נקודה $s_0\in[0,2]$ כך שהעקמומיות של γ בנקודה s_0 היא לפחות $|\kappa(s_0)|\geq\frac{\pi}{6}$.

פתרון

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^2\dot{\gamma}(0)\cdot\dot{\gamma}(s)\,ds\right| &= \left|\dot{\gamma}(0)\int_0^2\dot{\gamma}(s)\,ds\right| \\
&= \left|\hat{T}\cdot(1,0)\right| \\
&\leq \left|\left|\hat{T}\right|\right|\,||(1,0)||=1 \\
1 &\geq \int_0^2\dot{\gamma}(0)\cdot\dot{\gamma}(s)\,ds \\
&= \int_0^2\cos(\alpha(s)-\alpha(0))\,ds \\
\Rightarrow\exists s\in[0,2] &: \cos(\alpha(s)-\alpha(0))\leq\frac{1}{2} \\
\left|\underbrace{\alpha(s)-\alpha(0)}_{f(s)}\right| &\geq \frac{\pi}{3} \\
f(0) &= \alpha(0)-\alpha(0)=0 \\
f(s) &\geq \frac{\pi}{3} \\
\exists s_1 &: f'(s_1)=\frac{f(s)-f(0)}{s-0}=\frac{f(s)}{s}\geq\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

1. א. מצאו פרמטר טבעי עבור העקומה $\alpha(t)=(4\cos t,5-5\sin t,-3\cos t)$

ב. חשבו את העקמומיות, κ ואת הפיתול τ של עקומה זו.

ג. חשבו את אורך העקומה, עבור טווח הפרמטר $0\leq t\leq 2\pi$

פתרון

א. כדי למצוא את הפרמטר הטבעי נחשב את הנגזרת הראשונה:

$\alpha'(t)=(-4\sin t,-5\cos t,3\sin t)$.

ואת הנורמה שלה:

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{16\sin^2 t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}=\sqrt{25}=5$$

הפרמטר הטבעי מקיים $s=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t 5du=5t$.

ב. בפרמטריזציה טבעית $\alpha(s)=\left(4\cos\frac{s}{5},5-5\sin\frac{s}{5},-3\cos\frac{s}{5}\right)$. נמצא את העקמומיות

והפיתול ע"י נוסחאות (במקרה של פרמטר טבעי) מההרצאה: $\kappa=\|\alpha''\|,\tau=\frac{\det[\alpha'|\alpha''|\alpha''']}{\kappa^2}$.

לצורך כך, יש לחשב את הנגזרת הראשונה, השנייה והשלישית.

$$\alpha'(s)=\left(-\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5},-\cos\frac{s}{5},\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\right)$$
$$\alpha''(s)=\left(-\frac{4}{25}\cos\frac{s}{5},\frac{1}{5}\sin\frac{s}{5},\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}\right)$$
$$\alpha'''(s)=\left(\frac{4}{125}\sin\frac{s}{5},\frac{1}{25}\cos\frac{s}{5},-\frac{3}{125}\sin\frac{s}{5}\right)$$

ע"י הצבה בנוסחאות מקבלים $\kappa=\frac{1}{5},\tau=0$.

הערה: העקומות היחידות שלהן עקמומיות ופיתול קבועים הם סלילים (הוכח בהרצאה). ובגלל ש- $\tau=0$ העקומה מישורית . מכאן שהעקומה היא מעגל. העקמומיות של מעגל היא אחד חלקי הרדיוס שלו, ומכאן אנו רואים שרדיוס המעגל הוא 5.

ג. נציב בנוסחה לאורך עקומה: $L[\alpha]=\int_0^{2\pi}\|\alpha'(t)\|dt=10\pi$. זהו היקף מעגל בעל רדיוס 5.

5. תהי $x=\sqrt{4-z^2}$ עקומה במישור $[xz]$

א. מצאו פרמטריזציה של משטח הסיבוב $M\subseteq\mathbb{R}^3$ של עקומה זו סביב ציר z , ושרטטו אותו.

ב. מצאו את ערכי העקמומיות הראשיים $\kappa_1\geq\kappa_2$.

ג. מצאו את סימני כריסטופל של המשטח M , Γ_{ij}^k .

ד. רשמו את המשוואות הגאודזיות. (אין צורך לפתור אותן).

פתרון

5. אפשר להעלות בריבוע ולקבל $x^2+z^2=4$. מדובר בחצי ימני של עיגול ברדיוס 2 שמרכזו בראשית.

א. יש פרמטריזציה לעקומה ע"י קואורדינטות ספריות $x=2\sin\phi=f(\phi), z=2\cos\phi=g(\phi), \phi\in[0,\pi]$. ולכן פרמטריזציה עבור משטח הסיבוב תהיה $r(\theta,\phi)=\begin{pmatrix} f(\phi)\cos\theta \\ f(\phi)\sin\theta \\ g(\phi) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\sin\phi\cos\theta \\ 2\sin\phi\sin\theta \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}$. משטח הסיבוב יהיה ספירה ברדיוס 2 שמרכזה בראשית.

ב. נחשב את התבניות היסודיות. נתחיל עם הנגזרות הראשונות:

$r_{,1}=(-2\sin\phi\sin\theta, 2\sin\phi\cos\theta, 0), r_{,2}=(2\cos\phi\cos\theta, 2\cos\phi\sin\theta, -2\sin\phi)$ ע"י חישוב מכפלות פנימיות מקבלים $G=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

הנורמל הוא $\hat{n}=\frac{r_{,1}\times r_{,2}}{\left\|r_{,1}\times r_{,2}\right\|}=\left(-\sin\phi\cos\theta,-\sin\phi\sin\theta,-\cos\phi\right)$.

הנגזרות החלקיות השניות הן:

$$\begin{aligned}
r_{,11}&=\left(-2\sin\phi\cos\theta,-2\sin\phi\sin\theta,0\right)\\
r_{,12}&=\left(-2\cos\phi\sin\theta,2\cos\phi\cos\theta,0\right)=r_{,21}\\
r_{,22}&=\left(-2\sin\phi\cos\theta,-2\sin\phi\sin\theta,-2\cos\phi\right)
\end{aligned}$$

ע"י חישוב המכפלות הפנימיות מקבלים את התבנית היסודית השנייה $B=\left(b_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2\sin^2\phi & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

אופרטור הצורה הוא $S=G^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$. הערכים העצמיים שלו הם ערכי העקמומיות הראשיים. $\kappa_1=\kappa_2=1/2$.

ג. נשתמש בנוסחה $\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)$. המטריצה ההופכית למטריקה היא $\left(g^{km}\right)=\begin{pmatrix}1/4\sin^2\phi & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}$.

נתחיל עם $k=1$:

$$\Gamma_{ij}^{1}=\frac{1}{2}g^{1m}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{1i,j}+g_{1j,i}-g_{ij,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right)$$

ובגלל שהמטריקה אלכסונית נשארים עם

$$\Gamma_{ij}^{1}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{1i,j}+g_{1j,i}-g_{ij,1}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{1i,j}+g_{1j,i}-g_{ij,1}\right).$$

אם כך

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1}&=\frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)=0\\
\Gamma_{12}^{1}&=\frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{11,2}+g_{12,1}-g_{12,1}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(8\sin\phi\cos\phi\right)=\cot\phi=\Gamma_{21}^{1}\\
\Gamma_{22}^{1}&=\frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{12,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)=0
\end{aligned}$$

נעבור אל $k=2$:

$$\Gamma_{ij}^{2}=\frac{1}{2}g^{2m}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{1i,j}+g_{1j,i}-g_{ij,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right)$$

ובגלל שהמטריקה אלכסונית נשארים עם

$$\Gamma_{ij}^{2}=\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right)=\frac{1}{8}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right).$$

אם כך:

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{8}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=\frac{1}{8}\left(-8\sin\phi\cos\phi\right)=-\sin\phi\cos\phi$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{8}\left(g_{21,2}+g_{22,1}-g_{12,2}\right)=0=\Gamma_{21}^{2}.$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{8}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

ד. המשוואות הגאודזיות עבור הקואורדינטות שלנו $\left(\gamma^1,\gamma^2\right)=\left(\theta,\phi\right)$ הן

$\ddot{\theta}+\cot\phi\,\dot{\theta}\dot{\phi}+\cot\phi\,\dot{\phi}\dot{\theta}=0$ וגם $\ddot{\phi}-\sin\phi\cos\phi\left(\dot{\theta}\right)^2=0$ אפשר לפשט קצת:

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\phi=0\\ \ddot{\phi}-\sin\phi\cos\phi\left(\dot{\theta}\right)^2=0\end{cases}$$

עקומות במרחב – טכני:

7. א. מצא פרמ' מהירות יחידה לעקומה $\gamma(t)=(a\cos t\,,a\sin t\,,bt)$ (סליל)
ב. הוכח שהיא מקיימת $\langle\tilde{\gamma}'(s),u\rangle=c$ עבור וקטור u וסקאלר c קבועים כלשהם.

פתרון:

א. $\gamma'(t)=(-a\sin t\,,a\cos t\,,b)$ ולכן $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2}$. פרמ' מהירות יחידה $t(s)$ צריכה לקיים $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{dt}{ds}$ ולכן $t(s)=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ו-

$$\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(t(s)\big)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

יעבוד.

ב. $\tilde{\gamma}'(s)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},b\right)$, ערך ה- z של הביטוי קבוע, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ וזה בדיוק אומר שהמכפלה הפנימית שלו אם $(0,0,1)$ תמיד תהיה $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

עקומות במרחב – תיאורטי:

10. הוכיחו שאם לעקומה $\gamma(s)$ עקמומיות שאינה מתאפסת $k(s)\neq 0$, ופיתול שכן מתאפס $\tau(s)=0$, אז העקומה נמצאת במישור.

לפי פרנה $B'(s)=-\tau N=0$ ולכן $B(s)=\gamma'(s)\times N(s)$ קבוע B. בפרט $\langle\gamma'(s),B\rangle=0$ לכל s (ז"א שכיוון ההתקדמות של הפונקציה תמיד מאונך ל- B). אם נגדיר $f(s)=\langle\gamma(s)-\gamma(0),B\rangle$ אזי $f(0)=0$ ו- $f'(s)=\langle\gamma'(s),B\rangle+\langle\gamma(s)-\gamma(0),0\rangle=0$ ולפי מד"ר $f(s)\equiv 0$.
יוצא ש- $\gamma(s)$ נמצאת על המישור המאונך ל- B שעובר ב- $\gamma(0)$.

11. תהי עקומה $\gamma(s)$ במרחב אם עקמומיות $k(s) \neq 0$ ופיתול $\tau(s)$, נסמן $\gamma_T(s) = T\big(\gamma(s)\big)$ עבור איזושהי איזומטריה T, מה ניתן לומר על העקמומיות והפיתול של $\gamma_T(s)$?

מתקיים ש $T(v) = Av + b$ עבור וקטור b ומטריצה אורתוגונלית A קבועים. ולכן $\gamma_T(s) = A\gamma(s) + b$ לפי כלל השרשרת $\gamma_T'(s) = A\gamma'(s)$, $\gamma_T''(s) = A\gamma''(s)$ ולכן $\|\gamma''(s)\| = \|A\gamma''(s)\| = \|\gamma_T''(s)\|$ (זו תכונה של מטריצות אורתוגונליות) ולכן ל- γ ו- γ_T אותה עקמומיות.

בשביל לחשב פיתול צריך למצוא $\|\gamma_T'(s) \times \gamma_T''(s)\|$, אבל זה פשוט שטח המקבילית הנוצרת ע"י $\gamma_T'(s) = A\gamma'(s)$ ו- $\gamma_T''(s) = A\gamma''(s)$, וזה תלוי רק באורך של $A\gamma'(s)$ ו- $A\gamma''(s)$ והזווית ביניהם. כפל במטריה אורתוגונלית לא משנה אורכים וזוויות, ולכן

$$\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\| = \|A\gamma'(s) \times A\gamma''(s)\| = \|\gamma_T'(s) \times \gamma_T''(s)\|$$

הנוסחא לפיתול היא אם כן