אנליזה תרגיל 8

(1) הוכיחו כי קיימת נקודה c שעבורה מתקיים:

$$\frac{1}{\ln^2\left(c^2+1\right)+1}+\frac{1}{e^{2c}+1}=-7c^3+2c+2$$

(2) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל הממשיים, ומחזורית בעלת מחזור t. כלומר לכל x מתקיים: $f(x)=f(x+t)$. הוכיחו כי קיימת נקודה c שעבורה מתקיים: $f(c)=f\left(c+\frac{t}{2}\right)$

(3) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל הממשיים. הוכיחו כי קיימת נקודה c שעבורה מתקיים: $f(c)=c$ אם ורק אם קיימת נקודה d שעבורה מתקיים: $f(f(d))=d$.

הכוונה: הכוון ← נובע ישירות מהגדרת פונקציה (אין שימוש בתכונת הרציפות של f).
להוכחת הכוון → הניחו בשלילה שלכל x מתקיים $f(x)\neq x$, ובדקו מה קורה אם למשל לכל X מתקיים $f(x)<x$ (השתמשו בהנחה על d).

(4) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור [0,1]. נניח שמתקיים $f(0)=f(1)$. הוכיחו כי לכל n טבעי קיימת נקודה c כך ש-$f(c)=f\left(c+\frac{1}{n}\right)$.

(5) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור [0,1] וגזירה ב- (0,1). נתון ש- f(1)=0 ושלכל $x\in(0,1)$ $f(x)\neq 0$. הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (0,1) כך ש-$c=-\frac{f'(c)}{f(c)}$.

הכוונה: התבוננו בפונקציה: $g(x)=x\cdot f(x)$.

(6) נתונים מספרים חיוביים $a_1,a_2,...,a_n$, כך שלכל x ממשי מתקיים:

$$a_1^x+a_2^x+...+a_n^x\geq n$$

הוכיחו ש- $a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n=1$

הכוונה: מצאו ערך של x שבו מתקבל שיוויון באי-שיוויון הנתון.