# (88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ח מועד א'

הצעת פתרון | יונתן סמידוברסקי

## שאלה 1

הוכח כי הגבול

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

קיים.

הוכחה בהרצאה

## שאלה 2

### נתון הטור

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(e\sqrt{2}+\pi n)}{n-\log^2 n}$$

### בדוק האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

הטור חיובי החל משלב מסויים ($n \geq log(n)^2$ החל מ$N$ כלשהו)

ראשי נחשב את הגבול הבא לפי לופיטל $lim_{x\to\infty}\frac{log^2(x)}{x} = lim_{x\to\infty}\frac{2log(x)}{x} = lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0$

כלומר מתקיים $\frac{log^2(x)}{x} \leq 1$ החל מנקודה כלשהי, כלומר $log^2(x) \leq x$ (בתחום שלנו $x > 0$)

נעביר אגפים ונקבל $x - log^2(x) \geq 0$ ובפרט עבור הטבעיים לכל $n \in \mathbb{N}$.

לכן מתבדר או מתכנס בהחלט

ניעזר בכך ש$arctan$ פונקציה עולה, ומתקיים$arctan(e\sqrt{2}) > 1$, לכן

$$\frac{arctan(e\sqrt{2}+\pi n)}{n-log^2 n} \geq \frac{1}{n-log^2 n} \geq_{n\geq 3} \frac{1}{n}$$

כאשר המעבר האחרון מתקיים החל ממקום מסויים, ומס' סופי של איברים לא משפיע התכנסות הטור.

מהשוואה עם ההרמוני, קיבלנו **מתבדר**.

## שאלה 3

**חשב את הגבול הבא, תוך נימוק צעדי החישוב:**

$$.\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

בעצם לפי לופיטל $(\frac{0}{0})$

$$lim_{x\to 0}\frac{xtan(x)}{\sqrt{1-x^2}-1}=lim_{x\to 0}\frac{tan(x)+\frac{x}{cos^2(x)}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=lim_{x\to 0}\frac{\frac{sin(x)cos(x)+x}{cos^2(x)}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

שוב לופיטל

$$lim_{x\to 0}\frac{\frac{(cos(2x)+1)cos^2(x)-sin(2x)\cdot(sin(x)cos(x)+x)}{cos^4(x)}}{\frac{(-\sqrt{1-x^2})-(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}})\cdot(-x)}{1-x^2}}=\frac{(\frac{2}{1})}{(\frac{-1}{1})}=-2$$

## שאלה 4

**תהי $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ סידרה של מספרים ממשיים. הוכח שקיימת סידרת מספרים ממשיים $a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b_n$ כך שמתקיים $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.**

**הערה: בשאלה זו, אין להשתמש במשפט מההרצאה שטוען טענה חזקה יותר.**

**תשובה:**

פתרון (ממרתון עם ראם וקסמן)

לכל $n$ הקטע $[a-\frac{1}{n}, a]$ הוא מעוצמה א ואילו הקבוצה $[a-\frac{1}{n}] \cap \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ מעוצמה בת מנייה ($\le \aleph_0$)
לכן יש $b_n \in [a-\frac{1}{n}, a]$ שאינו שייך ל$[a-\frac{1}{n}] \cap \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, ובוודאי מתקיים $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n | n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$
לוקחים בעצם $n$-ים הולכים וגדלים, לכן $a - \frac{1}{n} \le b_n \le a$ ומסנדוויץ' $b_n \to a$.