בוחן

תרגיל 1 מיינו את חתך החרוט

$$-x^2+4xy+2y^2+4y+2=0$$

פתרון 1 לאחר לכסון (והחלפת קואורדינטות):

$$3x^2-2y^2+\frac{8}{5}\sqrt{5}x+\frac{4}{5}\sqrt{5}y+2=0$$

לאחר השלמה לריבוע (והחלפת קואורדינטות):

$$3x^2-2y^2+\frac{4}{3}=0$$

כלומר זו היפרבולה.

תרגיל 2 נתונה העקומה

$$.0\leq t\leq\pi,\ \ \gamma(t)=(10+2\cos t,-33+2\sin t)$$

א. מיצאו פרמטריזציית אורך קשת.

ב. מיצאו עקמומיות באמצעות פרמטריזציית אורך הקשת שמצאתם בסעיף א'.

פתרון 2 $\gamma'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$ לכן $.|\gamma'(t)|=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}=2$
נחשב אורך קשת

$$s(t)=\int_0^t|\gamma'(\tau)|d\tau=\int_0^t 2d\tau=2t$$

לכן $t(s)=\frac{s}{2}$ כלומר פרמטריזצית מהירות יחידה היא $\alpha(s)=\gamma(t(s))=\gamma(\frac{s}{2})=(10+2\cos\frac{s}{2},-33+2\sin\frac{s}{2})$.
כעת נוכל לחשב עקמומיות:

$$k=|\alpha''(s)|=\left|\frac{-1}{2}(\cos\frac{s}{2},\sin\frac{s}{2})\right|=\frac{1}{2}$$

תרגיל 3

א. סובבו את העיגול במישור xz הנתון ע"י $(x-5)^2+z^2=1$ סביב ציר ה־ z לקבלת טורוס.

ב. מיצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה שמצאתם בסעיף א'.

פתרון 3 פרמטריזציה

$$\alpha(\phi)=(5+\cos\phi,0,\sin\phi)=(r(\phi),0,z(\phi))$$

משטח סיבוב

$$\boldsymbol{x}(\theta,\phi)=((5+\cos\phi)\cos\theta,(5+\cos\phi)\sin\theta,\sin\phi)$$

נגזרות חלקיות

$$x_\theta=(-(5+\cos\phi)\sin\theta,(5+\cos\phi)\cos\theta,0)$$
$$x_\phi=(-\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)$$

מכפלות פנימיות

$$g_{11}=\langle x_\theta,x_\theta\rangle=(5+\cos\phi)^2$$
$$g_{12}=\langle x_\theta,x_\phi\rangle=0$$
$$g_{22}=\langle x_\phi,x_\phi\rangle=1$$

כלומר

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}(5+\cos\phi)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$