# תרגיל 4

1. יהי $X$ מ"מ ו$Y \subseteq X$ תת מרחב. ותהי $A \subseteq Y$. הוכיחו:
$cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$.
פתרון:
$cl_Y(A) = \{x \in Y : d(x, A) < 0\} = \{x \in X : d(x, A) < 0\} \cap Y = cl_X(A) \cap Y$.

2. הוכיחו: תהי $A$ קבוצה במרחב מטרי. $A$ סגורה אמ"ם $A' \subseteq A$.
פתרון:
$\Longleftarrow$: נניח ש$A$ סגורה. יהי $x \in A'$.תהי $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x\}$ כך ש $x_n \to x$. מכיוון ש$A$ סגורה היא מכילה את כל הגבולות של סדרות בתוכה. כלומר, $x \in A$.
$\Longrightarrow$: נניח ש $A' \subseteq A$ . נניח בשלילה ש$A$ לא סגורה. אז יש סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ כך ש $x_n \to x$, אבל $x \notin A$. זה אומר ש $x_n \in A \setminus \{x\}$. כלומר, $x \in A'$ ולכן $x \in A$. סתירה.

3. תהי $S$ קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
א. $x \in S \setminus S'$.
ב. קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x, \epsilon) \cap S = \{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.
פתרון:
א$\Longleftarrow$ב: $x \in S \setminus S'$, זה אומר שקיים $\epsilon > 0$ כך ש $(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. מנגד, $x \in S \cap B(x, \epsilon)$, ולכן $B(x, \epsilon) \cap S = \{x\}$.
ב $\Longleftarrow$ג: תהי $\{x_n\} \subseteq S \to x$. עבור ה$\epsilon$ מסעיף א', החל ממקום מסויים מתקיים $x_n \in B(x, \epsilon)$. לכן $x_n = x$.
ג $\Longleftarrow$א: נניח בשלילה ש$x \in S'$. זה אומר שיש סדרה ב$S$ שכל איבריה שונים ומתכנסת ל$x$. בפרט, הסדרה הזאת לא קבועה לבסוף. סתירה.

4. א. יהי $X$ מרחב מטרי שלם, ו$A \subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם $A$ סגורה ב$X$, אז $A$ מרחב מטרי שלם.
ב. הראו שאם $X$ אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש $A$ סגורה ב$X$, אבל $A$ לא מרחב שלם).
ג. יהי $X$ מרחב מטרי כלשהו, ו$A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו ש$A$ סגורה ב$X$.
ד. יהי $X$ מרחב מטרי שלם, ו$f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.
פתרון:
א. תהי $\{x_n\} \subseteq A$ סדרת קושי. בפרט, היא סדרת קושי ב$X$ . מכיוון ש$X$ מרחב שלם, יש לה גבול. כלומר, יש $x \in X$ כך ש $x_n \to x$. לפי ההגדרה השקולה של קבוצה סגורה, נקבל ש $x \in A$. כלומר, $\{x_n\}$ מתכנסת ב$A$.
ב. נקח $X = A$. אז $A$ סגורה ב$X$, אבל היא לא מרחב שלם.

ג. נניח בשלילה ש$A$ לא סגורה ב$X$. מההגדרה השקולה לסגירות, זה אומר שיש סדרה $A \supseteq \{x_n\}$ כך ש $x_n \to x$, אבל $x \notin A$. $\{x_n\}$ סדרה מתכנסת ב$X$, ולכן היא סדרת קושי. נוכיח שאינה מתכנסת ב$A$: אם קיים $a \in A$ כך ש $x_n \to a$, אז נכון גם במרחב $X$. מיחידות הגבול נקבל ש $x = a$, וזאת סתירה לכך ש $x \notin A$. לכן $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב$A$. כלומר, $A$ לא מרחב שלם.

ד. הפרכה:

נקח $X = (0,1)$ עם המטריקה הדיסקרטית (מטריקת 0־1 ). ונגדיר את פונקציית ההכלה $f : X \to \mathbb{R}$ (כל איבר נשלח לעצמו). זוהי פונקציה רציפה (טענת עזר: הוכיחו שכל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה). כעת, $X$ הוא מרחב שלם (הוכחנו בכיתה שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם), אבל $(0,1)$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$ (כלומר, עם המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$) הוא לא מרחב שלם. (לפי סעיף ג', כי הוא לא קבוצה סגורה.)

5. חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:

א. במרחב המטרי $X$ של אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0, 1, 2..., n\}$, עם המטריקה הבאה $d : X \times X \to [0, \infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

מצאו את הסגור של הקבוצה $A$= אוסף הסדרות המתאפסות לבסוף.

ב. ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ מצאו את הסגור של הקבוצה $A = 5\mathbb{Z}$.

ג. ב $C[0,1]$ עם מטריקת המקסימום, מצאו את הסגור של הקבוצה $A = \{f : f(\frac{1}{2}) <$ $5\}$.

פתרון:

א. $cl(A) = X$. הוכחה: תהי סדרה $x \in X$. אנחנו רוצים למצוא סדרה של סדרות מתאפסות לבסוף שמתכנסת אליה. נגדיר $x_n$ להיות סדרה שמזדהה עם $x$ עד המקום ה$n$, ואחרי זה מתאפסת. טענה: $x_n \to x$. הסבר: $d(x, x_n) \leq \dfrac{1}{n+1} \to 0$.

ב. $cl(A) = \mathbb{Z}$. הוכחה: נוכיח שלכל $z \in \mathbb{Z}$ יש סדרה ב$5\mathbb{Z}$ ששואפת אליו. שימו לב שמספיק להוכיח זאת עבור 1, כי אם $5\mathbb{Z} \supseteq \{x_n\} \to 1$, אז $5\mathbb{Z} \supseteq \{zx_n\} \to z$. ובכן, לכל $n$ המספר $3^n$ זר ל5, ולכן הפיך ב $\mathbb{Z}_5$. כלומר, קיים $a_n$ כך ש $a_n 3^n \equiv -1 \mod 5$ . וזה אומר ש $a_n 3^n + 1 \in 5\mathbb{Z}$. נשים לב ש $\{a_n 3^n + 1\}$ זאת סדרה ששואפת ל1 ב$(\mathbb{Z}, d_3)$.

ג. $cl(A) = \{f : f(\frac{1}{2}) \leq 5\}$. הוכחה: ראשית, זאת קבוצה סגורה, כי הוכחתם בש"ב קודמים שפונקציית ההצבה באיזשהו מספר היא רציפה, וזה המקור של הנקודון $\{5\}$ תחת פונקציה רציפה.

כעת, יהי $f \in X$ כך ש $f(\frac{1}{2}) \leq 5$. אנחנו רוצים סדרה ב$A$ ששואפת אליו. אם $f(\frac{1}{2}) < 5$, ניתן לקחת את הסדרה הקבועה. אחרת, נגדיר $f_n(x) = f(x) - \dfrac{1}{n}$. אז ברור ש $f(\frac{1}{2}) < 5$, וכן $d(f_n, f) = ||f - f_n|| = ||\dfrac{1}{n}|| = \dfrac{1}{n} \to 0$, לכן $f_n \to f$.

6. הוכיחו/הפריכו:

א. $A_1' \cup ... \cup A_n' = (A_1 \cup ... \cup A_n)'$.

ב. $\bigcup A_i' = (\bigcup A_i)'$.

פתרון:

א. הוכחה:

ברור שאם $B \subseteq A$ אז $A' \subseteq B'$, ולכן $A_i \subseteq (A_i \cup ... \cup A_n)$ גורר ש $A'_i \subseteq (A_1 \cup ... \cup A_n)'$, שגורר ש $(A'_1 \cup ... \cup A'_n) \subseteq (A_1, ..., A_n)'$.

מצד שני, נניח ש$x \in (A_1 \cup ... \cup A_n)'$. כלומר, יש סדרה שכל איבריה שונים $x \leftarrow \{x_n\} \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n$. מעיקרון שובך היונים, יש $1 \leq i \leq n$ כך שאינסוף מאיברי הסדרה נמצאים ב$A_i$. זאת תת סדרה, שגם שואפת לx ולכן $x \in A'_i$, כלומר, $x \in A'_1 \cup ... \cup A'_n$.

ב. הפרכה: נקח $A_n = \{\frac{1}{n}\}$, תת קבוצה של $\mathbb{R}$. אז, לכל $n$, $A'_n = \emptyset$, ולכן $\bigcup A'_n = \emptyset$.

אולם, $\bigcup A_n = \{\frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}\}$, ולכן $(\bigcup A_n)' = \{0\}$.