נכתב על ידי יהונתן רגב

## תזכורת

1. תהיינה $A_{m\times n}, B_{n\times p}$ מטריצות.

אם: $B=(v_1 \cdots v_n)$, אז: $A\cdot B=(A\cdot v_1 \cdots A\cdot v_n)$.

**הוכחה:** נסמן $C=A\cdot B$, אזי: $C_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}=(A\cdot v_k)_i$.

לכן $C_k(C)=A\cdot v_k$ ■

2. נסמן: $e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. אז: $A\cdot e_i=C_i(A)$.

3. תהי $A_{n*n}$ הפיכה. נסמן $A=(v_1 \cdots v_n)$. אז: $\forall_{1\le i\le n}: A^{-1}\cdot v_i=e_i$.

**הוכחה:** לפי (2): $A\cdot e_i=v_i$. נכפול ב - $A^{-1}$ משמאל, ונקבל: $A^{-1}\cdot A\cdot e_i=A^{-1}\cdot v_i$,

לכן: $e_i=A^{-1}\cdot v_i$ ■

## הגדרה

תהי $A$ מטריצה ריבועית. נאמר ש – $A$ **דומה למטריצה** $A'$ אם קיימת מטריצה הפיכה $P$, כך שמתקיים: $A'=P^{-1}\cdot A\cdot P$. נסמן: $A'\sim A$.

## הערה

דמיון מטריצות הינו יחס שקילות.

## הוכחה

1. <u>רפלקסיביות</u>: $A=I^{-1}\cdot A\cdot I$, לכן: $A\sim A$.
2. <u>סימטריות</u>: נניח: $B\sim A$, לכן: קיימת מטריצה הפיכה $P$, כך ש: $B=P^{-1}\cdot A\cdot P$. נכפול ב - $P$ משמאל וב - $P^{-1}$, מימין, ונקבל: $A=P\cdot B\cdot P^{-1}$. ז"א: $A=(P^{-1})^{-1}\cdot B\cdot (P^{-1})$, לכן: $A\sim B$.
3. <u>טרנזיטיביות</u>: נניח: $B\sim A$ ו - $C\sim B$, לכן: קיימות מטריצות הפיכות $P$ ו - $Q$, כך ש: $B=P^{-1}\cdot A\cdot P$ ו - $C=Q^{-1}\cdot B\cdot Q$. אזי: $C=Q^{-1}\cdot (P^{-1}\cdot A\cdot P)\cdot Q$. לכן: $C=(Q^{-1}\cdot P^{-1})\cdot A\cdot (P\cdot Q)$. ז"א: $C=(P\cdot Q)^{-1}\cdot A\cdot (P\cdot Q)$, לכן: $C\sim A$ ■

## הערה

יהי $T: V\to V$ אופרטור לינארי. יהיו $B, B'$ שני בסיסים ל $V-$. יהיו $A, A'$ שתי מטריצות מייצגות של $T$ ביחס לבסיסים $B, B'$ בהתאמה. תהי $P$ מטריצת המעבר בין הבסיסים $B$ ו - $B'$. מתקיים: $A'=P^{-1}\cdot A\cdot P$.

### הגדרה

**מטריצה $A$ נקראת לכסינה** (ניתנת ללכסון) אם $A$ דומה למטריצה אלכסונית $D$. כלומר, מטריצה $A$ לכסינה אם קיימת מטריצה הפיכה $P$ כך ש: $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, כך ש – $D$ מטריצה אלכסונית.

### הערה

לכסון מטריצות יכול להיות יעיל בחישוב חזקה של גדולה של מטריצה.

### הסבר

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו - $k \in \mathbb{N}$ "גדולי". נרצה לחשב את $A^k$.

נניח ש – $A$ לכסינה. לכן, קיימת מטריצה הפיכה $P$, כך ש:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

נחשב:

$$A^k = (P^{-1} \cdot D \cdot P)^k = \overbrace{(P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdots (P \cdot D \cdot P^{-1})}^{k\ times}$$

$$A^k = \overbrace{P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdots (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1}}^{k\ times}$$

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$$

והרי:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

■

### הערה

תכונות של מטריצות דומות: יהיו $A, A \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש: $A' \sim A$. מתקיים:

1. $\det(A) = \det(A')$:

$$\det(A') = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P)$$

$$\det(A') \overset{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}{\cong} \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot det(P)$$

$$\det(A') \overset{\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}}{\cong} \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A) \cdot \det(P)$$

$$\det(A') = \det(A)$$

$\blacksquare$

2. $p_A(x) = p_{A'}(x)$:

$$p_{A'}(x) = \det(x \cdot I - A')$$

$$p_{A'}(x) = \det(x \cdot I - P^{-1} \cdot A \cdot P)$$

$$p_{A'}(x) = \det(P^{-1} \cdot (x \cdot I) \cdot P - P^{-1} \cdot A \cdot P)$$

$$p_{A'}(x) = \det(P^{-1} \cdot (x \cdot I - A) \cdot P)$$

$$p_{A'}(x) \overset{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}{\cong} \det(P^{-1}) \cdot \det(x \cdot I - A) \cdot det(P)$$

$$p_{A'}(x) \overset{\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}}{\cong} \frac{1}{\det(P^{-1})} \cdot \det(x \cdot I - A) \cdot \det(P)$$

$$p_{A'}(x) = \det(x \cdot I - A)$$

$$p_{A'}(x) = p_A(x)$$

$\blacksquare$

**מסקנה**

למטריצות דומות אותן ערכים עצמיים.

**מסקנה**

אם $A_{n \times n}$ לכסינה, אזי יש לה $n$ ערכים עצמיים (ייתכן שחלקם שווים).

**הוכחה**

נניח $A$לכסינה. לכן:

$$A \sim D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) \overset{\text{מסקנה}}{\cong} p_D(x)$$

$$p_A(x) \overset{\text{משפט}}{\cong} (x - d_1) \cdots (x - d_n)$$

$$\Downarrow$$

$$spec(A) = \{d_1, \cdots, d_n\}$$

$\blacksquare$

### מסקנה

יהי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

1. המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ אינה לכסינה, שכן אין לה ערכים עצמיים.
2. המטריצה $A=\begin{pmatrix}cos\varphi&-sin\varphi\\\sin\varphi&cos\varphi\end{pmatrix}$ אינה לכסינה עבור: $\varphi\neq 0°,180°$.

### דוגמה

יהי $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, ותהי: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. נוכיח כי $A$ אינה לכסינה.

### הוכחה

הערך העצמי היחיד של $A$ הינו $\lambda=1$. נניח בשלילה ש - $A$ לכסינה. לכן, קיימת מטריצה אלכסונית $D$, כך ש: $A\sim D$. עפ״י מסקנה, ל $D-$ אותם ערכים עצמיים כמו ל $A-$, לכן מתחייב כי: $D=I$. לכן, $A\sim I$, אזי קיימת מטריצה הפיכה $P$, כך ש: $A=P^{-1}\cdot I\cdot P=I$, בסתירה לכך ש: $A\neq I$ ■

### משפט - קריטריון כללי ללכסון מטריצה

מטריצה $A_{n\times n}$ לכסינה אם ורק אם במרחב $\mathbb{F}^n$ קיים בסיס $B$ המורכב מווקטורים עצמיים של $A$. איברי בסיס זה הינם עמודות של מטריצה מלכסנת $P$.

### הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח ש - $A_{n\times n}$ לכסינה. לכן, קיימת מטריצה הפיכה $P$, כך ש:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=D=\begin{pmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot e_i=\begin{pmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}\cdot e_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\\lambda_i\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\lambda_i\cdot\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\lambda_i\cdot e_i.$$

$$P\cdot(P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot e_i)=P\cdot(\lambda_i\cdot e_i)$$

$$A\cdot(P\cdot e_i)=\lambda_i\cdot(P\cdot e_i)$$

$P\cdot e_i=C_i(P)$, ו $P-$ הפיכה, לכן $P\cdot e_i\neq 0$.

קיבלנו $n$ וקטורים עצמיים $\forall_{1\leq i\leq n}: P\cdot e_i$. זהו בסיס שכן $\{P\cdot e_i = C_i(P)\}_{i=1}^{n}$ בת"ל, כעמודות מטריצה הפיכה $P$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח שקיים בסיס $B$ המורכב מווקטורים עצמיים של $A$. נסמן: $B=\{v_1,\cdots,v_n\}$. נגדיר: $P=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n\end{pmatrix}$. $P$ הפיכה שכן עמודותיה בת"ל. נחשב את $P^{-1}\cdot A\cdot P$:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = P^{-1}\cdot A\cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = P^{-1}\cdot \begin{pmatrix} A\cdot v_i & \cdots & A\cdot v_n\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = P^{-1}\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1\cdot v_1 & \cdots & \lambda_n\cdot v_n\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} P^{-1}\cdot(\lambda_1\cdot v_1) & \cdots & P^{-1}\cdot(\lambda_n\cdot v_n)\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1\cdot(P^{-1}\cdot v_1) & \cdots & \lambda_n\cdot(P^{-1}\cdot v_n)\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1\cdot e_1 & \cdots & \lambda_n\cdot e_n\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \left(\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \cdots \quad \lambda_n\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

■