

מבחן באנליזה מודרנית 1

מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. כל הגדרה או ציטוט שווה 8 נקודות, וכל הוכחה שווה 10 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. יהי (X, S, μ) מרחב מידה חיובית.

א. הגדירו פונקציות מדידות S .

ב. הגדירו פונקציות אינטגרביליות $d\mu$.

ג. צטטו את למת פאטו.

ד. תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות לא שליליות שאינטגרביליות $d\mu$.

נניח שקיים $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ לכל $x \in X$, f אינטגרבילית $d\mu$, ומתקיים

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

ה. הראו ע"י דוגמה שהתוצאה של סעיף ד' אינה נכונה עבור פונקציות

אינטגרביליות $\{f_n\}$ ו- f שמחליפות סימן.

2. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע ב- \mathbb{R} .

ב. צטטו את הכללת לבג ל"משפט היסודי של חשבון אינטגרלי" (שני חלקים).

ג. יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות רציפות בהחלט בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי

המכפילה $f(x)g(x)$ אף היא רציפות בהחלט בקטע $[a, b]$.

3. א. הגדירו מרחבי $L^p[d\mu]$ $1 \leq p \leq \infty$ ביחס למידה כלשהי.

ב. צטטו את אי-שויון הולדר.

ג. עבור $f \in L^\infty([0, 1])$ (עם מידת לבג) הוכיחו ש- $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$

ד. נניח שסדרה $\{f_n\}$ ב- $L^p[d\mu]$ $1 \leq p < \infty$ מתכנסת לפונקציה

$f \in L^p[d\mu]$ בנורמה של המרחב. הוכיחו כי $f_n \rightarrow f$ "במידה" ז.א.

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$