הרצאה II- אינפי 1

משפט: לכל a,b ממשיים קיים r רציונלי כך ש $a<r<b$. בהנחה ש b>a.

הוכחה: $\varepsilon := b-a>0$ ולפי עיקרון ארכימדס $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n_0}<\varepsilon=b-a$. נגדיר $E:=\left\{m\in Z: \frac{m}{n_0}<b\right\}$. E חסומה מלעיל ולכן קיים m_0 איבר מקסימלי, ז״א $m_0=maxA$. (לפי משפט). בנוסף: $m_0+1\notin E$, $\frac{m_0+1}{n_0}\geq b$ ומתקיים $\frac{m_0}{n_0}\geq b-\frac{1}{n_0}>b>a$.

ונקבל כי $b-\frac{1}{n_0}>b-a+b$ ולכן $\frac{1}{n_0}<b-a$. ומכאן נובע כי $a<\frac{m_0}{n_0}<b$. משל.

<u>קו ממשי רוחבי</u>: $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$:

I) $X+\infty=\infty$

II) $X+(-\infty)=x-\infty=-\infty$

III) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

IV) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

V) $(+\infty)+(-\infty)=$ לא מוגדר

VI) $X(\pm\infty)=\pm\infty$ עבור x חיובי

VII) $X(\pm\infty)=\mp\infty$ עבור x שלילי

VIII) 0∞ לא מוגדר

IX) לכל x ממשי מתקיים: $x<+\infty$

X) לכל x ממשי מתקיים: $x>-\infty$

<u>הגדרה</u>:

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$,

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\}$,

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\leq b\}$,

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$.

<u>הגדרה</u>: ערך מוחלט: $|x|=\begin{cases} x & ;x>0 \\ 0 & ;x=0 \\ -x & ;x<0\end{cases}$. תכונות: $|x|\geq 0, |xy|=|x|\cdot|y|$.

משפט: אי שיוויון משולש: $|x+y|\leq|x|+|y|$. לכל x,y ממשיים.

הוכחה: לכל x ממשי מתקיים: $|x|\leq x\leq|x|-$ ונקבל $-x\leq|x|$. כעת נפצל לשני מקרים:

1. $x+y\geq 0,\ |x+y|=x+y\leq|x|+|y|$
2. $x+y\leq 0, |x+y|=(-x)+(-y)\leq|x|+|y|$

משל.

משפט: אי שיוויון משולש מוכלל: לכל x,y ממשיים מתקיים: $||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|$. לכל x,y ממשיים.

הוכחה:

1. $|x|=|y+(x-y)|\leq|y|+|x-y|$
2. $|y|=|x+(y-x)|\leq|x|+|y-x|$
3. $|x|-|y|\leq|x-y|$
4. $|x|-|y|\geq-|x-y|$

ומכאן: $-|x-y|\leq|x|-|y|\leq|x-y|$. ומכאן נובע $||x|-|y||\leq|x-y|$. והטענה הוכחה. משל.

חסם עליון ותחתון:

<u>הגדרה</u>: A מוכלת ממש ברציונליים.

- $\Gamma_+(A)=\{c\in R: \forall x\in A\ X\leq C\}$ קבוצת כל החסמי מלעיל.

- $\Gamma_-(A)=\{c\in R:\forall x\in A\ X\geq C\}$ קבוצת כל החסמי מלרע.

<u>הגדרה</u>: A חסומה מלעיל אם $\Gamma_+(A)\neq\emptyset$, A חסומה מלרע אם $\Gamma_-(A)\neq\emptyset$. *A* חסומה אם *A* חסומה מלעיל וגם *A* חסומה מלרע.

טענה: *A*חסומה א"וא קיים *c* חיובי כך ש$\forall x\in A:\ |x|<c$.

משפט: תהי *A* קבוצה לא ריקה מוכלת בממשיים. 1. *A* חסומה מלעיל, אזי יש ב $\Gamma_+(A)$ איבר מינימאלי.

2. *A* חסומה מלרע, אזי יש ב $\Gamma_-(A)$ איבר מקסימלי.

הוכחה: $\forall \mathrm{a}\in \mathrm{A},\mathrm{b}\in\ \Gamma_+(A):a\leq b$. ולפי אקסיומת דדיקינד קיים *c* כך ש $A\leq c\leq\Gamma_+(A)$.

קודם כל, $A\leq c$ לכן $\forall a\in A: a\leq c$ וע"פ הגדרה $c\in\ \Gamma_+(A)$. ובנוסף ידוע כי $\forall b\in\ \Gamma_+(A): c\leq b$. וע"פ הגדרה נקבל כי $C=min(\Gamma_+(A))$.

<u>הגדרה</u>: *A* לא ריקה חסומה מלעיל אז $min(\Gamma_+(A))=supA$. **חסם עליון**

A לא ריקה חסומה מלרע אז $max(\Gamma_+(A))=infA$. **חסם תחתון**

<u>הגדרה</u>: *A* לא ריקה לא חסומה מלעיל אז $+\infty=supA$.

A לא ריקה חסומה מלרע אז $-\infty=infA$.

משפט: קריטריון לאינפימום וסופרימום.

A קבוצה לא ריקה ומוכלת ממש בממשיים.

המספר $q\in\overline{\mathbb{R}}$ חסם עליון של A (supA) אם ורק אם:

1. $\forall x\in A: x\leq q$
2. $\forall q'<q\exists x\in A: q'<x\leq q$.

המספר $p\in\overline{\mathbb{R}}$ חסם תחתון של A (infA) אם ורק אם:

3. $\forall x\in A: x\geq p$
4. $\forall p'>p\exists x\in A: p'>x\geq p$.

עבור $q\in R$. , q=supA אם ורק אם:

1. $\forall x\in A: x\leq q$
2. $\forall\varepsilon>0\exists x\in A: q-\varepsilon<x\leq q$.

עבור $p\in R$. , p=infA אם ורק אם:

1. $\forall x\in A: x\leq p$
2. $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A: p+\varepsilon>x\geq p$.

<u>פרק שני: תורת הסדרות</u>

<u>הגדרה של סדרה</u>: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ כאשר $f(n)=a_n$.

<u>הגדרה</u>: תהי סדרה $\{x_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ אומרים שמספר L ממשי הוא גבול הסדרה אם מתקיים:

1. $\forall\varepsilon>0\exists\bar{n}\in N\forall n\geq\bar{n}:\ x_n\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.
2. $\forall\varepsilon>0\exists\bar{n}\in N\forall n\geq\bar{n}:\ |x_n-L|<\varepsilon)$.