אנליזה הרמונית - תרגיל 6

6 בדצמבר 2018

1. תהי $f(x) = 1 - x^2$ בקטע $[-\pi, \pi]$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

הטור פורייה של f בקטע זה.

(א) חשבו את a_nו b_n.

(ב) לאילו ערכים מתכנס הטור ב $x = 5\pi$ ו $x = 6\pi$? נמקו.

2. לכל מספר ממשי $p \neq 0$, תהי $f_p(x) = e^{px}$ בקטע $[-\pi, \pi]$ ויהי

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

הטור פורייה של $f_p(x)$ בקטע זה.

(א) מצאו את a_n ו b_n .

(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

3. חשבו בעזרת טורים ידועים ומשפט הנגזרת (כלמר על ידי גזירה והשוואת מקדמים) את טורי פורייה הבאים:

(א) בעזרת הטור $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{n} \sin nx$ מצאו את הטור של x^2. (יש למצוא את המקדם החופשי).

(ב) בעזרת הטור של x^2, מצאו את הטור פורייה של הפונקציה $x^3 - \pi^2 x$. נקמו מדוע השיטה לא בהכרח תעבוד עבור הטור של x^3.

(ג) בעזרת הסעיף הקודם, מצאו פונקציה אליה מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$.

(ד) בעזרת הסעיפים הקודמים (כלמר, בלי לבצע אינטגרציה, מצאו את הטורים של x^3 ו x^4)

(ה) מצאו בעזרת הסעיפים הקודמים את סכומה הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$$

(ו) הציאו שיטה אינדוקטיבית, לחשב את הסכומים מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$. וודאו שהשיטה עובדת עבור $n=6$.

(ז) האם השיטה מתאימה גם לחישוב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k}}$ עבור k אי־זוגי? מדוע?

4. תהי $f\left(x\right)=\left|x\right|$ בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$, ויהי

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

הטור פורייה של f בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$.

(א) חשבו את a_n ו b_n .

(ב) הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ מתכנס לכל ערך של x.

(ג) לכל x ממשי נגדיר $g\left(x\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}na_n$. תארו את g בקטע $\left[-2\pi,2\pi\right]$. (כלמר כפונקציה מפוצלת).

(ד) חשבו את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^{2}}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^{4}}$.

5. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π כך ש

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\mathbf{d}x=0 .$$

נגדיר $g\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathbf{d}t$.

(א) הוכיחו ש g מחזורית 2π.

(ב) יהי $\sum_{n=\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ הטור פורייה המרוכב של f ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$ הטור פורייה המרוכב של g. הוכח שלכל x ממשי מתקיים השוויון

$$g\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$$

ושלכל n מתקיים

$$d_n=\frac{c_n}{in} .$$

6. תהי f פונקציה רציפה בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$, $f\left(-\pi\right)=f\left(\pi\right)$ ו $f'\in E\left[-\pi,\pi\right]$ (כלמר, f' רציפה למקוטעין). יהי

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

הטור פורייה של f בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$. הוכיחו שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}nb_n=0 .$$

האם התנאי נכון שגם $\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}n^2b_n=0$.