

רמזים להוכחת הטענה בדבר גבולות

28 באוקטובר 2015

הוכיחו את הלמה בעזרת הרמזים הבאים:

1. יהי $\varepsilon > 0$ נתון.
2. קחו $N \in \mathbb{N}$ "שהמרחק" בין $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ לבין $\frac{a_N}{N}$ איננו יותר מ- $\varepsilon/2$. (למה? תניחו בשלילה שלא קיים N כנ"ל)
3. קחו M גדול דיו כך ש

$$\frac{a_k}{NM} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k < N$$

4. יהי $n \geq NM$. יתקיים לפי חילוק עם שארית שלמדנו בתיכון ש- $n = Nt + k$ עבור $k < N$ ועבור איזה $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ שעבורו אנו יודעים ש- $t \geq M$.

5. תשתמשו ברמזים העבים מהסעי' הקודמים כדי לסיים את ההוכחה לפי הגדרת הגבול עם אפסילון (רמז אחרון לפעם זו: קחו בהגדרת הגבול את $n_0 = NM \in \mathbb{N}$, מה אתם מקבלים עבור $\frac{a_n}{n}$ בסימונים מעלה?). תזכרו מה אתם רוצים להוכיח לפי הגדרת הגבול.