אינפי II תיכוניסטיים - תרגול V

תזכורת

Ⅰ) עבור חלוקה $P: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ של הקטע $[a,b]$ נגדיר:

$\alpha_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\qquad \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$ סכום דרבו תחתון של החלוקה

$\beta_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\qquad \overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Delta x_i$ סכום דרבו עליון של החלוקה

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Ⅱ) אינטגרל דרבו העליון: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(P) \mid P\}$

Ⅲ) אינטגרל דרבו התחתון: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(P) \mid P\}$

Ⅳ) נ' f הינה אינטגרבילית דרבו אם: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

נ' f היא אינטגרבילית רימן אמ"מ היא אינטגרבילית דרבו ובמקרה זה האינטגרלים שווים.

= סוף תזכורת =

תרגיל חימום

נניח ש-$f(x)$ פ' חסומה ואינטגרבילית רימן דרבו בקטע $[0,4]$. עוד 3

נניח שבכל תת קטע $I\subset[0,4]$ קיים לפחות נקודה אחת $x_0\in I$ ש- $f(x_0)\le 2$.

הוכיחו ש- $\int_0^4 f(x)\,dx \le 8$

תפ׳: חלוקה כלשהי של הקטע $[0,4]$. ניקח סכום רימן של הפו׳ עבור החלוקה,

ובכל תחום נבחר נק׳ עבורה $f(c_i)\le 2$. לכן סכום רימן הינו:

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(c_i) \le 2\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 2\cdot(4-0) = 8$$

■

<u>תרגיל</u>

א. תהי f פו׳ המוגדרת על התחום $[a,b]$. נניח ש-f היא אי שלילית, רציפה

ובנוסף קיימת נק׳ $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)>0$. הוכיחו כי:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

<u>רמז:</u> הראו כי יש $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P, הסכום העליון של דרבו גדול

מ- δ

ב. הראו כי אם מוותרים על הדרישה ש-f רציפה, הטענה בסעיף א׳ אינה נכונה

א. פתרון, f רציפה בקטע סגור ולכן אינטגרבילית. נב״ש ש- $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

לכן, האינפימום של כל סכומי דרבו העליונים הוא 0.

נתון כי קיימת נק׳ $x_0\in[a,b]$ עבורה $f(x_0)>0$. נבחר $0<\varepsilon<f(x_0)$. מרציפות

f, קיים $\delta>0$ כך ש- $\forall x\in[a,b]: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

כלומר: $\forall x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]: \quad 0<f(x_0)-\varepsilon \le f(x) \le f(x_0)+\varepsilon$

תהי P חלוקה ל-$[a,b]$. מקבלים:

$$\bar{S}(P) \ge 2\delta\cdot(f(x_0)-\varepsilon) > 0$$

כי הסופרימום על הקטע $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ הוא לכל הפחות $f(x_0)-\varepsilon$ וכל חלוקה תכיל בתוכה את הקטע $([x_0-\delta, x_0+\delta])$.

כלומר, האינפימום של סכום דרבו העליונים הוא לכל הפחות $0<f(x_0)-\varepsilon$ בסתירה.

■

2. ניקח את הקטע $[0,1]$ עם $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq\frac{1}{2}\\ 1 & x=\frac{1}{2}\end{cases}$

הגדרה

תהי $P=\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ חלוקה של $[a,b]$. $Q=\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ תקרא עידון של P אם וקבוצותיה מוכלות בקבוצות של P, כלומר, לכל $\beta\in J$ קיים $\alpha\in I$ כך ש-

$$B_\beta \subseteq A_\alpha.$$

מסמנים $P\le Q$ (החלוקה Q מעודנת יותר מ-P).

תזכורת - למת העידון

אם $P \le Q$ חלוקה אז:

$$\underline{S}(P) \le \underline{S}(Q) \le \overline{S}(Q) \le \overline{S}(P)$$

$$\overline{S}(P)-\overline{S}(Q),\ \underline{S}(Q)-\underline{S}(P) \le |Q\setminus P|\cdot\lambda(P)\cdot\omega$$

כאשר

$$\omega = \beta-\alpha = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

תרגיל

תהי f פ' מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,1]$. סדרו את הביטויים הבאים

מקטן לגדול:

(i) $f(0)$

(ii) $f(1)$

(iii) $\frac{1}{3}\left(f(0)+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})\right)$

(iv) $\frac{1}{3}\left(f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(1)\right)$

(v) $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i}{300}\right)$

(vi) $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} f\left(\frac{i-1}{300}\right)$

(vii) $\int_0^1 f(x)\,dx$

נבנה 3 חלוקות ל-$[0,1]$:

$$\begin{cases} P_1: x_0=0 < x_1=1 \\ P_2: 0<\frac{1}{3}<\frac{2}{3}<1 \\ P_3: 0<\frac{1}{300}<\dots<\frac{299}{300}<1 \end{cases}$$

מתקיים $P_1 \le P_2 \le P_3$ (נקודות מוכלות אחת על השניה) ולכן לפי הלמה

נקבל: $\underline{S}(P_1) \le \underline{S}(P_2) \le \underline{S}(P_3) \le \int_0^1 f(x)dx \le \bar{S}(P_3) \le \bar{S}(P_2) \le \bar{S}(P_1)$

מונוטוניות של f:

$\underline{S}(P_1) = f(0) = (i)$

$\underline{S}(P_2) = (iii)$

$\underline{S}(P_3) = (vi)$

$\bar{S}(P_3) = (v)$

$\bar{S}(P_2) = (iv)$

$\bar{S}(P_1) = (ii)$

$\Longrightarrow \quad (i) \le (iii) \le (vi) \le (vii) \le (v) \le (iv) \le (ii)$

מסקנה

הוכחנו כי מתקיים:

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \le \pi \le 1 + \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

נגדיר $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ וחלוקה $P: 0<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1$ של $[0,1]$.

f רציפה ב-$[0,1]$ ולכן אינטגרבילית שם. לכן מתקיים:

$$\underline{S}(P)\leq\int_0^1 f(x)\,dx\leq\overline{S}(P)$$

כיוון ש-$\sqrt{1-x^2}$ מונו' יורדת ב-$[0,1]$, מתקיים:

$$\forall\, 1\leq i\leq 4:\quad \alpha_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_i)\ ,\ \beta_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \underline{S}(P)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\overset{0}{\overline{\sqrt{1-(1)^2}}}\right)=$$

$$\overline{S}(P)=\frac{1}{4}\left(\underbrace{\sqrt{1-0^2}}_{=1}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right)$$

$f(x)$ היא גרף של חצי מעגל היחידה העליון ולכן $\int_0^1 f(x)\,dx$ הוא בעצם השטח

של רבע מעגל היחידה, כלומר $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \underline{S}(P)\leq\frac{\pi}{4}\leq\overline{S}(P)$$

$$\Updownarrow$$

$$4\underline{S}(P)\leq\pi\leq 4\overline{S}(P)$$

■

משפט

תהי f פונ' בקטע סגור. אם f חסומה ויש לה מספר סופי של נק'

אי רציפות, אזי היא אינטגרבילית שם.

תרגיל

האם הפו' $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}+x\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אינטגרבילית ב- $[-10,10]$?

$\sin(\cdot)$ חסומה בין 1- ל-1 ולכן בסה"כ $-100 \leq f(x) \leq 100$

ל-$f(x)$ ישנה נק' אי רציפות אחת (ב- $x=0$) ולכן היא אינטגרבילית ב- $[-10,10]$.

קבוצות אפסיות

הגדרה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה. אזי כיסוי פתוח של A הינו אוסף של קטעים פתוחים $\{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ כך ש- $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$.

תת-כיסוי סופי: תת אוסף סופי (מהכיסוי) שמכסה את A.

משפט (היינה-בורל)

לכל כיסוי פתוח של קטע $[a,b]$ (לכל $a \leq b \in \mathbb{R}$) קיים תת כיסוי סופי.

תרגיל

תהיינה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קבוצות כך ש- $A_n \subseteq \mathbb{R}$ וגם לכל כיסוי פתוח ל A_n קיים תת כיסוי סופי. האם גם הקבוצות הבאות מקיימות את התכונה הזאת?

I. $A_1 \cup A_2$

II. $A_1 \cap A_2$

III. $A_1 \setminus A_2$

IV. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

I. כן. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח ל $A_1\cup A_2$. כיוון ש- $A_1, A_2 \subseteq A_1\cup A_2$ אזי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח ל A_1, A_2. כיוון שלכל כיסוי פתוח ל A_1 קיים תת כיסוי סופי, קיימת קבוצת אינדקסים I_1 סופית עבורה $A_1 \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_1} U_\alpha$. מאותו הנימוק, קיימת קבוצת אינדקסים סופית I_2 עבורה $A_2 \subseteq \bigcup_{\alpha\in I_2} U_\alpha$.

אזי $I_1\cup I_2$ היא קבוצת אינדקסים סופית, ומתקיים ש-

$$A_1\cup A_2 \subseteq \left(\bigcup_{\alpha\in I_1} U_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I_2} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I_1\cup I_2} U_\alpha$$

כלומר מצאנו תת כיסוי סופי ל $A_1\cup A_2$ ■

II. כן, בדומה לאיחוד.

III) לא בהכרח: נתבונן בקבוצות $A_1=[0,2], A_2=[0,1]$. הן סגורות וחסומות

ולכן מהיינה-בורל מקיימים התנאי עליון. לעומת זאת, $A_2 \setminus A_1 = [0,1)$ לא מקיים

את התנאי: נזכיר את הכיסוי הפתוח הבא עבור $[0,1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n := \left(-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right)$$

אז מתקיים כי $(-1,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \supseteq [0,1)$, אבל לכל מספר סופי

של קבוצות מהכיסוי, האיחוד אינו מכסה את $[0,1)$: עבור תת קבוצה

סופית $\{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}\}$, כך ש- $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ מתקיים כי

$$U_{n_1} \subseteq U_{n_2} \subseteq \dots \subseteq U_{n_k} = \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i} = \left(-\frac{n_k}{n_k+1}, \frac{n_k}{n_k+1}\right) \not\supseteq [0,1)$$

IV) לא בהכרח: נתבונן בקבוצות $A_n = \{n\}$. אלו הם קטעים סגורים ב- $\mathbb{R}$

($\{n\} = [n,n]$) ולכן לפי היינה-בורל מקיימות את התכונה. לעומת זאת,

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ אינה מקיימת את התכונה (ניתן לבנות כיסוי פתוח ולהראות

שלא קיים לו תת-כיסוי סופי ל- $\mathbb{N}$ בדומה לסעיף הקודם).

הגדרה

נאמר ש-A אפסית (או בעלת מידה אפס) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי בן מניה בפתוח לקבוצה, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon$

(ניתן לכסות את A ע"י קבוצה בת מניה של קטעים שאורכם שואף ל-0)

דוגמא

לכל $n\in\mathbb{N}$, הקבוצה $A=\{1,\dots,n\}=[n]$ היא אפסית

יהי $\varepsilon>0$ נגדיר כיסוי פתוח $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$:

$$\forall 1\le i\le n: \quad a_i = i-\frac{\varepsilon}{4n}, \quad b_i = i+\frac{\varepsilon}{4n}$$

אז מתקיים! $A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\left(i-\frac{\varepsilon}{4n}, i+\frac{\varepsilon}{4n}\right)$ וכן $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(i+\frac{\varepsilon}{2n}-\left(i-\frac{\varepsilon}{2n}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

■

משפט

מתקיים:

(I) אם A אפסית אזי כל תת קבוצה של A גם היא אפסית

(II) אם $|A|=\aleph_0$ אזי היא ממידה אפס (ההפך אינו נכון! קבוצת קנטור)

(III) איחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס גם הוא ממידה אפס

(IV) לכל $a<b\in\mathbb{R}$, $[a,b]$ אינו ממידה אפס.

הערה

נאמר שתכונה מתקיימת כמעט בכל מקום (כב"מ) אם היא מתקיימת פרט לקבוצה אפסית.

דוגמא

$f(x)=[x]$ רציפה כמעט בכל מקום כי היא רציפה ב-$\mathbb{R}$ פרט לבד מ-$\mathbb{Z}$,

שזוהי קבוצה ממידה אפס (כי $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$)

משפט (לבג)

I אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי היא רציפה כמעט בכל הקטע

II תהי f כנ"ל חסומה ב-$[a,b]$. אם f רציפה כמעט בכל $[a,b]$ אזי היא

אינטגרבילית שם.