קורס 88-231-05
פונק' מרוכבות
מרצה: שמחה הורוביץ
בנין 216 חדר 109

שעות קבלה ב' 16^{45}-18
ספר מומלץ: בן ציון קין
פונק' מרוכבות
הרכב הציון: תרגילים 15%
מבחן 85%
אין בוחן!

פונק' מרוכבות

$x^2+1=0$ לא פתיר מעל $\mathbb{R}$!
נגדיר "מספר דמיוני" $i=\sqrt{-1}$.
אבל יש עוד משוואות ללא שורשים ב $\mathbb{R}$:
$x^2+4=0$ שאותה פותר $2i$ לפי קיבוץ ופילוג.
מספר מהצורה $a+bi$ נקרא מספר מרוכב.
הגדרה: המספרים המרוכבים שמסומנים ב $\mathbb{C}$ הם
כל המס' מהצורה $a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.
אם $z=a+bi$ אזי:
$\mathrm{Re}\,z=a$ החלק הממשי של z
$\mathrm{Im}\,z=b$ החלק המדומה של z

עובדה: $\mathbb{C}$ הוא שדה, כ"א מוגדרות ב $\mathbb{C}$ כל פעולות החשבון עם תוצאות שנשארות ב $\mathbb{C}$ וכל כללי החשבון חילוף וקיבוץ לחיבור וכפל, פילוג, קיום יחידה לחיבור ולכפל (0, 1) והפכי כחוץ מ0.

הפעולות: $z=a+bi$
$w=c+di$

$z\pm w=a\pm c+(b\pm d)i$, $zw=(ac-bd)+i(ad+bc)$

$$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2},\quad c^2+d^2\in\mathbb{R}$$

הגדרה: אם $z=a+bi\in\mathbb{C}$ מגדירים את הצמוד $\bar{z}=a-bi$

תכונות:

א) $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$

ב) $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

ג) $\overline{z^n}=\bar{z}^n \quad n\in\mathbb{N}$

ד) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad w\neq 0$

ה) $\bar{\bar{z}}=z$

ו) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$

ז) $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$

ח) $z\in\mathbb{R} \iff \bar{z}=z$

ט) $\bar{z}=-z \iff z$ מדומה טהור דהיינו $z=bi$, $b\in\mathbb{R}$

משפט: יהי $P(x)$ פולינום ממשי, כלומר $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k\in\mathbb{R}$.

נניח של-P יש שורש מרוכב z. אזי גם $\bar{z}$ שורש שלו.

הוכחה: נתון $0=P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

$$\Leftarrow \quad \bar{0}=0=\overline{P(z)}=\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k z^k}=\sum_{k=0}^{n}\overset{\in\mathbb{R}}{\bar{a}_k}\,\overline{z}^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(\bar{z})^k=0$$

מש"ל

<u>שאלה:</u> האם גם המשפט ההפוך נכון? אם p פולינום מרוכב שכל שורשיו בזוגות כמו הצמוד שלהם האם בהכרח $p=cq$ כאשר q פולינום ממשי?

<u>רעיון ההוכחה:</u> אם $a,\bar a, b,\bar b$ אזי בהכרח

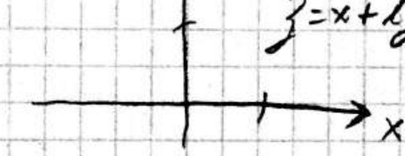
$$p=c(z-a)(z-\bar a)(z-b)(z-\bar b)$$

כעת

$$z^2-\underbrace{(a+\bar a)}_{Re\,a}z+\underbrace{a\bar a}_{(Re\,a)^2+(Im\,a)^2}$$

ולכן הכל ממשי!

<u>המישור המרוכב</u>



$z=x+iy$

וניתן כך לחבר, לחסר ולכפול בסקלר מספרים מרוכבים כמו וקטורים!

<u>הצגה קטבית:</u>

אם $z=x+iy$ נוכל לכתוב $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$\Rightarrow z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

θ לא יחיד כי $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$

r היא המרחק בין 0 ל-z, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$

θ הוא הזווית של z, ומסומן $\theta=\arg z$

עוד נעיר כי אם $z=a+bi$ אזי $\bar z=a-bi$ ו $z\bar z=|z|^2$

תכונות הערך המוחלט

א) $|zw| = |z||w|$

ב) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $\quad w\neq 0$

ג) $|z^n| = |z|^n$

ד) $|\operatorname{Im} z| \le |z|$

$|\operatorname{Re} z| \le |z|$

ה) $|z+w| \le |z|+|w|$ אי"ש המשולש

ו) $\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$ אי"ש ~~ההפרש~~ המשולש השני

מוכיחים עם $|z|=z\bar{z}$

ההצגה הקטבית

$z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$, $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$ $\Leftarrow$

$$z_1 z_2 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}\theta_2 =$$

$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)) =$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

צ"ל הזוויות מתחברות והערכים המוחלטים מוכפלים.

בפרט,

$r_2 \neq 0$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$

$n\in\mathbb{N}$ $\quad z_1^n = r_1^n \operatorname{cis}(n\theta)$

1/3 1

שורשים

$z = r\operatorname{cis}\theta \neq 0$ ו $N \ni n \geq 1$

לפי מה שלמדנו $\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\operatorname{cis}\frac{\theta}{n}$

אבל $z = r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta+2\pi k)$, $k \in N$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{z} = r^{1/n}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

שונים עבור $k=0,1,\dots n$.

דוגמה

$$\sqrt[5]{(1+i)} = \sqrt[5]{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[10]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{20}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{9}{20}\pi\right) \dots$$

תרגיל (ממבחן)

$$|z|=1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

פתרון

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \iff z\bar{z} = 1 \iff |z| = 1$$

תרגיל (ממבחן)

$|z|=1$ וכן $\mathbb{C} \ni a \neq z, \frac{1}{\bar{z}}$ אזי $\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right| = 1$

פתרון

נסמן $w = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ לפי א' די $\bar{w} = \frac{1}{w}$

$$\bar{w} = \frac{\bar{a}-\bar{z}}{1-a\bar{z}} \underset{\bar{z}=\frac{1}{z}}{=} \frac{\bar{a}-\frac{1}{z}}{1-\frac{a}{z}} = \frac{\bar{a}z-1}{z-a} = \frac{1}{w} \Rightarrow |w| = 1$$

משל

בתחילת הקורס נתקלנו בפולינומים ללא שורשים ממשיים.

המצאנו את $i^2=-1$.

<u>דבר נפלא</u>: אין צורך להמציא עוד מספרים כי

<u>המשפט היסודי של האלגברה:</u>

לכל פולינום מרוכב לא קבוע יש שורש מרוכב.

<u>מקרים פרטיים</u>: פולינום לא קבוע ממעלה 1 הוא $az+b$

$a\neq 0$, ויש שורש מרוכב $z=-\frac{b}{a}$

ממעלה 2: az^2+bz+c, $a\neq 0$, והשורשים $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

זה מספר מרוכב כמו שלמדנו.

עבור z^3+az^2+bz+c מעלה שלישית, נציב $z=y-\frac{a}{3}$

$$\Rightarrow z^3=y^3 ay^2+\frac{a^2}{3}y-\frac{a^3}{27},\quad az^2=ay^2-\frac{2ay}{3}+\frac{a^3}{9}$$

אחרי הצבה נקבל פולינום מהסוג $y^3+3\alpha y+\beta=0$

ונציב $y=w-\frac{\alpha}{w}$

$$y^3=w^3-3\alpha w+\frac{3\alpha^2}{w}-\frac{\alpha^3}{w^3}$$

$$3\alpha y=3\alpha w-\frac{3\alpha^2}{w}$$

והפולינום הוא $0=y^3+3\alpha y+\beta=w^3-\frac{\alpha^3}{w^3}+\beta$ וזה פותר

מקבלים לכאורה 6 פתרונות, אבל 3 נפסלים. $(w^3=x)$

סדרות

<u>הערה:</u> אם $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, אזי המרחק ביניהם הוא אורך הוקטור המחבר ביניהם, $|z_1 - z_2|$.

<u>הגדרה:</u> תהי $\{z_n\}$ סדרה מרוכבת. נאמר שהסדרה מתכנסת ל $z_0 \in \mathbb{C}$, מסומן $z_n \to z_0$ או $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > n_0$ אזי $|z_n - z_0| < \epsilon$

<u>משפט 1:</u> לכל n נרשום $z_n = x_n + i y_n$ וגם $z_0 = x_0 + i y_0$

אזי התנאים הבאים שקולים:

א) $\lim z_n = z_0$

ב) $\lim |z_n - z_0| = 0$

ג) $x_n \to x_0$ וגם $y_n \to y_0$

ד) הנק' (x_n, y_n) שואפות ל (x_0, y_0) ב $\mathbb{R}^2$

<u>משפט 2:</u> (אריתמטיקה של גבולות)

$z_n \to z_0$, $w_n \to w_0$ ו $c \in \mathbb{C}$.

א) $w_n \pm z_n \to w_0 \pm z_0$

ב) $w_n z_n \to w_0 z_0$

ג) $c z_n \to c z_0$

ד) $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z_0}{w_0}$ $\quad w_0 \neq 0$

<u>הוכחה:</u> לוקחים מחברת אינפי 1.

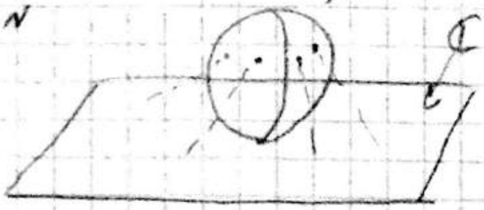
דוגמה

$$e^{-3}+\frac{1}{9}i = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n+\frac{9n+3}{4n-5}i$$

$\left(1-\frac{3}{n}\right)^n+i(n\to\infty)$ שואף מתבדר בגלל החלק המדומה

עבור גבול במובן הרחב ממציאו את "הכדור של רימן" או ה"ספירה של רימן".

מקפלים את המישור



זוהי התאמה חח"ע בין הכדור למישור. (פרט לקוטב הצפוני)

במובן זה יש רק ∞ אחד ב-$\mathbb{C}$ (הקוטב הצפוני).

לפי זה $z_n\to\infty$ ב-$\mathbb{C}$ $\iff$ $|z_n|\to+\infty$ ב-$\mathbb{R}$

פונקציות

נדבר תחילה על פונק' מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{C}$. אותן פונק'

$$z(t)=x(t)+y(t)i,\quad t\in[a,b]$$

גיאומטרית זו מסילה במישור.

הגדרה: תהי $z(t)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של t_0, ויהי $L\in\mathbb{C}$. נאמר כי $\lim_{t\to t_0} z(t)=L$ אם לכל $\epsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $0<|t-t_0|<\delta$ אזי $|z(t)-L|<\epsilon$.

משפט 1: (משמעות Ticha)

תהי $z(t)=x(t)+y(t)i$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של t_0.

יהי $c\in\mathbb{C}$ קבוע, $c=a+bi$.

אזי התנאים הבאים שקולים:

א) $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = L$

ב) $\lim\limits_{t\to t_0} |z(t)-L| = 0$

ג) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$

$\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$

ד) $\lim\limits_{t\to t_0} (x(t),y(t))=(a,b)$ ב-$\mathbb{R}^2$

8/3

משפט 2: אריתמטיקה של גבולות מתקיימת!

הגדרה: תהי $z(t)$ מוגדרת בסביבת $t_0 \in \mathbb{R}$.
נאמר ש $z(t)$ **רציפה** ב t_0 אם $\lim_{t \to t_0} z(t)$
קיים ושווה ל $z(t_0)$.

משפט 3: נניח $z(t)=x(t)+iy(t)$ מוגדרת בסביבת t_0. אזי
$z(t)$ רציפה ב t_0 $\Leftrightarrow$ $x(t),y(t)$ רציפות ב- t_0 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ הפונק' $(x(t),y(t))$ מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}^2$ רציפה ב t_0.

משפט 4: נניח $z(t)$ ו $w(t)$ פונק' שמוגדרות בסביבה של $t_0 \in \mathbb{R}$ ורציפות ב t_0.
נניח $c \in \mathbb{C}$ קבוע.
אזי $w \pm z$, $w \cdot z$, cz **רציפות** ב t_0.
אם $w(t_0) \neq 0$ גם $\frac{z(t)}{w(t)}$ **רציפה** ב t_0.

פונק' מ $\mathbb{C}$ אל $\mathbb{C}$

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

u נקרא החלק הממשי של f ומסומן $\operatorname{Re} f = u$

v -"- המדומה -"- $\operatorname{Im} f = v$

דוגמא: $f(z)=z^2 \Leftarrow$ $f(x+iy)=(x+iy)^2=\underbrace{x^2-y^2}_{u}+i\underbrace{2xy}_{v}$

תמיד u,v פונק' מ $\mathbb{R}^2$ אל $\mathbb{R}$.

הגדרה: יהי $z_0 \in \mathbb{C}$ נק' כלשהי. סביבה בסיסית של z_0 היא כדור פתוח סביב z_0

$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

סביבה מנוקבת של z_0 היא

$B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

הגדרה: יהי $f(z)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של z_0, ויהי $L \in \mathbb{C}$ קבוע. נאמר כי $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$

אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $0<|z-z_0|<\delta$ אזי $|f(z) - L| < \varepsilon$.

משפט 5: יהי $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $z_0 = x_0 + iy_0$, ויהי $L = a+ib$ קבוע.

אזי התנאים הבאים שקולים:

א) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$

ב) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z) - L| = 0$

ג) $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a$ וגם $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b$

ד) $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (u(x,y), v(x,y)) = (a,b)$ במובן של פונק' מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$.

ה) לכל סדרה $z_0 \neq z_n \to z_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = L$

ו) לכל מסילה רציפה $z(t) = x(t) + iy(t)$ כך ש $z(t_0) = z_0$ מתקיים $\lim\limits_{t \to t_0} f(z(t)) = L$, כלומר בכל דרך שנשאף ל-$z_0$ נקבל ש-$f(z)$ שואפת ל-L.

8/3

משפט 6: אריתמטיקה של גבולות מתקיימת!

הגדרה: תהי $f(z)$ מוגדרת בסביבה שלמה של z_0.

נאמר שהיא רציפה ב-z_0 אם $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים ושווה ל-$f(z_0)$.

משפט ד:

א) $f=u+iv$ רציפה ב-$z_0=x_0+iy_0$ $\iff$ $u(x,y)$, $v(x,y)$ רציפות ב-(x_0,y_0)

ב) אם f ו-g רציפה ב-z_0 ו-$c\in\mathbb{C}$ קבוע אזי $f\pm g$, cf ו-fg רציפות ב-z_0, ואם $g(z_0)\neq 0$ גם $\frac{f}{g}$ רציפה ב-z_0.

ג) הרכבה של פונק' רציפות היא רציפה.

נגזרות:

נתחיל עם פונק' מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{C}$.

$z(t)=x(t)+iy(t)$ פונק' שמוגדרת בסביבת t_0.

נגדיר $z'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$

נשים לב שגבול זה שווה ל-:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)+iy(t)-x(t_0)-iy(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+i\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}=$$

$$=x'(t_0)+iy'(t_0)$$

בתנאי ש-$x'(t_0)$, $y'(t_0)$ קיימים שניהם.

<u>הערה:</u> כזכור, כל פונק' רציפה $z(t)=x(t)+iy(t)$ מגדירה מסילה במישור.

אם יש נגזרת $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$ אזי הוקטור $(x'(t),y'(t))$ הוא וקטור המהירות שמשיק למסילה.

נעבור לפונק' מ-$\mathbb{C}$ ל-$\mathbb{C}$.

<u>הגדרה:</u> נניח $f(z)$ מוגדרת בסביבת z_0.

נגדיר $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

<u>דוג' חישוב:</u> $f(z)=z^n$.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\underset{\text{לפי הבינום של ניוטון}}{=}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\cancel{z^n}+nz^{n-1}\Delta z+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^{n-2}\Delta z^2+\dots+\Delta z^n-\cancel{z^n}}{\Delta z}=$$

שנכון בכל שדה

אריתמטיקה על גבולות

$$=\lim_{\Delta z\to 0}nz^{n-1}+\Delta z\left(z^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\dots+\Delta z^{n-1}\right)=nz^{n-1}$$

משפט 1: (כללי גזירה)

נניח f,g פונק' המוגדרות בסביבת $z_0\in\mathbb{C}$
וגזירות ב-z_0. יהי $c\in\mathbb{C}$ קבוע. אזי:

א) f,g רציפות ב-z_0.

ב) $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$

ג) $(cf)'(z_0)=cf'(z_0)$

ד) $(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$

ה) אם $g(z_0)\neq 0$ אזי $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'g-fg'}{g^2}(z_0)$

ו) $(c)'=0$

ז) אם $0\neq n\in\mathbb{Z}$ אזי $(z^n)'=nz^{n-1}$

ח) כלל השרשרת: אם גם h גזירה ב-$f(z_0)$
אזי $(h\circ f)'(z_0)=h'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

הוכחה: לוקחים מחברת מאינפי 1. מוחקים את
כל ה-x ורושמים z.

ע"פ משפט 1 ניתן לגזור רק פולינומים
ופונק' רציונליות $\frac{p(z)}{q(z)}$.

דוג': $f(z)=\bar{z}$.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

תחילה נשאיף $\Delta z\to 0$ לאורך ציר x

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ ונחשב כאשר $\Delta x\to 0,\ \Delta y=0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

על ציר y, $\Delta x=0,\ \Delta y\to 0$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$$ (שני גבולות שונים בכיוונים שונים)

$\Leftarrow$ אין גבול $\Leftarrow$ $f(z)=\bar{z}$ לא גזירה בשום מקום ב-$\mathbb{C}$!

<u>דוג':</u> $f(z)=|z|^2$

$$f(z)=|z|^2=z\cdot\bar{z}$$

<u>טענה:</u> לכל $z\neq 0$, $f(z)$ לא גזירה.

<u>הוכחת הטענה:</u> אם $f(z)$ גזירה ב $z_0\neq 0$ אזי $\frac{f(z)}{z}=\bar{z}$ גזירה ב z_0 לפי ה' במשפט 1. אבל $\bar{z}$ לא גזירה באף מקום ולכן $f(z)$ לא גזירה ב $z_0\neq 0$.

עבור $z_0=0$ נרשום

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{z\bar{z}-0}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$

לכן הפונק' גזירה ב-0 בלבד.

דוג' כללית:

נניח $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ גזירה בנק'
$z_0=x_0+iy_0$. נגדיר $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$. כעת בפרט
בציר ה-x

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta z=\Delta x+i0\Delta y}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

ובפרט הנגזרות החלקיות האלו קיימות,
כיון שנתון ש-$f'(z_0)$ קיים, ולכן הגבולות הללו קיימים.
לאורך ציר y נקבל

$$f'(z_0)=-iu_y(x_0,y_0)+v_y(x_0,y_0)$$

בסיכום קיבלנו

$$f'(z_0)=(u_x+iv_x)(x_0,y_0)=(v_y-iu_y)(x_0,y_0)$$

צ"ל אם $f=u+iv$ גזירה ב-$z_0=x_0+iy_0$ אז בהכרח
יש ל-u,v נגזרות מסדר ראשון בנק' (x_0,y_0)
והן מקיימות בנק' זו

$$\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$$

אלו הן משוואות קושי-רימן.

דוגמ'

① $\bar{z} = f(z) = x - iy \Leftarrow V_y = -1$, $U_x = 1$, $U_x + V_y$ ולכן
את קושי-רימן. לכן $\bar{z}$ לא גזירה בשום מקום.

② $f(z) = |z|^2 \Rightarrow \begin{cases} U_x = 2x & V_y = 0 \\ U_y = 2y & V_x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ קושי רימן מתקיים
רק ב-(0,0) ולכן $|z|^2$ לא גזירה בנק' $(x,y) \neq (0,0)$
אבל עדיין אין לנו תנאי מספיק לקבוע ש-$|z|^2$ גזירה!

<u>משפט 2:</u> תהי $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ $= f(x+iy)$
מוגדרת בסביבת $z_0 = x_0 + iy_0$.
אזי f גזירה ב-z_0
$\Leftarrow$ u, v דיפר' ב-(x_0, y_0) ומקיימות שם את משוואות
קושי-רימן $\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{cases}$ ב-(x_0, y_0).
יתר על כן, אם $f'(z_0)$ קיימת אזי

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

<u>הוכחה:</u> כבר הוכחנו שקושי-רימן תנאי הכרחי לקיום הנגזרת.
נדלג על ההוכחה שדיפר' u, v תנאי הכרחי לקיום הנגזרת.
נעבור להוכחת המספיקות.
נניח כי u, v דיפר' ב-(x_0, y_0) ומקיימות קושי-רימן.
צ"ל $f'(z_0)$ קיימת ושווה $(U_x + iV_x)(x_0, y_0)$.
u דיפר' אומר כי

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

בדומה עבור v עם ϵ_2.

8/3

2

לפי הגדרה

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{\Delta x+i\Delta y}$$

המונה הוא:

$$\begin{matrix}u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)\\+i(v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0))\end{matrix}=\begin{matrix}u_x\Delta x+u_y\Delta y+\epsilon_1\\+i(v_x\Delta x+v_y\Delta y+\epsilon_2)\end{matrix}=$$

כאשר כל הנגזרות הן ב (x_0,y_0).

ע"פי קושי-רימן,

$$=\begin{matrix}u_x\Delta x-v_x\Delta y+\epsilon_1\\+i(v_x\Delta x+u_x\Delta y+\epsilon_2)\end{matrix}=\begin{matrix}(u_x+iv_x)\Delta x\\+i(u_x+iv_x)\Delta y\end{matrix}+\epsilon_1+i\epsilon_2=$$

$$\underline{=(u_x+iv_x)(\Delta x+i\Delta y)+\epsilon_1+i\epsilon_2}$$

$$\Rightarrow f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(u_x+iv_x)(\Delta x+i\Delta y)+\epsilon_1+i\epsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(u_x+iv_x+\frac{\epsilon_1}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{i\epsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}\right)=$$

$$=u_x+iv_x+\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\underbrace{\frac{\epsilon_1+i\epsilon_2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x+i\Delta y}}_{\text{חסום}}=(u_x+iv_x)(x_0,y_0)$$

(פרק מוחלט 1)

לכן $f'(z_0)$ קיימת ושווה ל$(u_x+iv_x)(x_0,y_0)$. משל

הערה: הוכחנו באינפי 3 שאם הנגזרות
החלקיות מסדר 1 של $u(x,y)$ רציפות ב-(x_0,y_0)
אזי היא דיפר' שם.
בקורס שלנו נתעסק בעיקר עם פונק' u ו-v
בעלות נגזרות חלקיות רציפות, לכן כדי להפעיל
את משפט 2 מספיק יהיה לבדוק את קושי רימן.

הגדרה: $f(z)$ אנליטית או הולומורפית ב-z_0
אם היא גזירה בסביבה שלמה של z_0.
$f(z)$ אנליטית או הולומורפית בקבוצה D אם היא
אנליטית בכל נק' של D.
שקול: f אנליטית ב-D אם היא גזירה באיזו
קב' פתוחה שמכילה את D.
אם D בעצמה פתוחה, אזי f אנליטית ב-D $\Leftrightarrow$ f גזירה
בכל נק' של D.

הגדרה: פונק' אנליטית בכל $\mathbb{C}$ נקראת פונק' שלמה.

סקירה של פונק' אלמנטריות בתחום המרוכב:

(1) כל פולינום $p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k\in\mathbb{C}$, הוא פונק' שלמה.

(2) פונק' רציונלית $\frac{p(z)}{q(z)}$ של פולינומים אנליטית בכל $\mathbb{C}$
פרט לאפסים של q.

(3) לכל $z=x+iy\in\mathbb{C}$ נגדיר
$$f(z)=f(x+iy)=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x\operatorname{cis} y$$
כאן $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$, $u,v\in C^1(\mathbb{R}^2)$

נבדוק קושי רימן: $u_x=e^x\cos y=v_y$ ✓ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
$u_y=-e^x\sin y=-v_x$ ✓

לכן f פונק' שלמה.

③ משפט 2, אחרי שידוע של f אנליטית, נמצא את הנגזרת:

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial x}=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$$

$\Leftarrow f'(z)=f(z)$.

עוד תכונות:

① אם $z=x+0i\in\mathbb{R}$ אזי $f(z)=e^x\cos 0+ie^x\sin 0=e^x$

ז"א עבור $z\in\mathbb{R}$, $f(z)=e^x$.

② טענה: לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2)$.

הוכחת הטענה: $z_k=x_k+iy_k$.

$$\Rightarrow f(z_1+z_2)=e^{x_1+x_2}\text{cis}(y_1+y_2)=e^{x_1}e^{x_2}\text{cis}(y_1)\text{cis}(y_2)=$$

$$=f(z_1)f(z_2)$$

③ $z_1,z_2\in\mathbb{C}\Rightarrow f(z_1-z_2)=\frac{f(z_1)}{f(z_2)}$.

הוכחה- לפי ②, $f(z_1-z_2)\cdot f(z_2)=f(z_1)$.

בחלוקה נקבל את הדרוש.

④ הטווח של f הוא $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ובפרט לכל $z\in\mathbb{C}$ $f(z)\neq 0$.

כשאלה ממבחן באינפי' 3.

לאור התכונות הנ"ל, נסמן את הפונ' $f(z)$ בשם e^z.

תכונות חדשות:

5) e^z מחזורית (אבל יש הקלאסית סולה בכל $\mathbb{R}$)
בפרט, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$
($e^{2\pi i}=1$)

6) אם z מדומה טהור, $z=iy$, אזי $e^z = e^{iy} = \operatorname{cis} y$
לכן בדר"כ מסמנים מספר מרוכב כלשהו ב $re^{i\theta}$.

עוד פונק' אלמנטרית

4) נגדיר הכללה של $\ln$ שנקרא לה $\log z$

מוטיבציה: $\log z = \log re^{i\theta} = \log r + \log e^{i\theta} = \ln(r) + i\theta$

הגדרה: יהי $0 \ne z \in \mathbb{C}$. נגדיר

$$\log z = \ln|z| + i\underbrace{\arg z}_{\theta} = \ln r + i\theta$$

לפי זה אם $z = re^{i\theta} \Rightarrow \log z = \ln r + i\theta$

$$\Rightarrow e^{\log z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r}\cdot e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

לכן $\log z$ הפכית ל-e^z.

נבדוק קושי רימן:

$$\log z = \underbrace{\tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{u} + i\,\underbrace{\operatorname{atg}\left(\tfrac{y}{x}\right)}_{v}$$

$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} = v_y$ ✓

$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} = -v_x$ ✓

$\Rightarrow$ הפונק' אנליטית

אבל $\log z$ לא פונק' , הסיבה היא של $z \ne 0$,
$\arg z$ רב ערכית ומקבלת ∞ ערכים.

8/3 2

כדי להתגבר על בעיה זו, נגדיר ענף של $\arg z$
והתאם ענף של $\log z$.

למשל, הענף הראשי של $\arg z$ הוא $-\pi \le \operatorname{Arg} z < \pi$

והתאם ענף של $\log z$, $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

<u>הערה חשובה:</u> בקרן השמאלית של ציר x, $\operatorname{Arg} z$
לא רציפה $\Leftarrow$ $\operatorname{Log} z$ לא רציפה שם $\Leftarrow$ לא גזירה.
בשאר המקומות $\operatorname{Log} z$ אנליטית.
ענף אחר של $\log z$ יתקבל אם נגדיר למשל
$0 \le \arg_1(z) < 2\pi$ ו- $\log_1(z) = \ln|z| + i\arg_1(z)$.

$\log_1 z$ אנליטית ב-$\mathbb{C}$ פרט לקרן הימנית של ציר ה-x.

15/3

הנגזרת של $\log z$:

$$\log z = \ln|z| + i\arg z$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\log z = \frac{\partial}{\partial x}\ln|z| + i\frac{\partial}{\partial x}\arg z = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{z}}$$

הערה: אם $z \in \mathbb{R}^+$ אז $\operatorname{Log} z = \log_1 z = \ln z$
הקלאסי. אבל יש חסרון לענף $\log_1 z$ שכן בדיוק שם הפונק' לא רציפה!

נזכיר את התכונה האופיינית של הלוגריתם הקלאסי
$\ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ $(x_1, x_2 > 0)$.

נבדוק במרוכבים -
$$z_1 = r_1e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2e^{i\theta_2}$$
$$\Downarrow$$
$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow \log(z_1z_2) = \ln(r_1r_2) + i(\theta_1+\theta_2) =$$
$$= \ln r_1 + \ln r_2 + i\theta_1 + i\theta_2 = \log z_1 + \log z_2$$

אבל שוויון זה הוא בעצם שוויון של קב' - ∞ הערכים של $\log(z_1z_2)$ מתלכדים עם ∞ הערכים של $\log z_1 + \log z_2$.

אם נרד לענף מסויים של $\log z$ שהשוויון נכון רק $2\pi i$ modulo.

דוגמה: נגדיר $z_1 = z_2 = -i \Rightarrow \operatorname{Log} z_1 = \underbrace{\ln|z_1|}_{\ln 1 = 0} + i\underbrace{\operatorname{Arg} z_1}_{-\frac{\pi}{2}} = -i\frac{\pi}{2}$

אבל $\operatorname{Log} z_2 = -i\frac{\pi}{2}$

$$-i\pi = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \neq \operatorname{Log} z_1z_2 = \operatorname{Log}(-1) = i\pi$$

בסתירה.

ההפרש תמיד יהיה כפולה שלמה של $2\pi i$.

נחזור לרשימת הפונק' האלמנטריות:

5) פונק' טריגו'. נגדיר $z=x+iy$

אין כאן זוויות!

מוטיבציה - אם $\theta\in\mathbb{R}$,

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, $e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

נחבר משוואות: $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

נחסיר: $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

לכן נגדיר לכל $z\in\mathbb{C}$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,,\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

מתקיים

$$\cos(iz)=\frac{e^{i(iz)}+e^{-i(iz)}}{2}=\cosh(z)$$

$$\sin(iz)=\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}=i\sinh(z)$$

תכונות

א) המוטיבציה ועצם ההגדרה של הפונק' פשוט שאם $z\in\mathbb{R}$ אזי $\cos z$ ו-$\sin z$ חוזרות לקלאסיות.

ב) הפונק' $\cos z$ ו-$\sin z$ הן שלמות כי הן צירופים של פונק' שלמות ידועות.

ג)
$$\frac{d}{dz}\cos z=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2}=-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}=-\sin z\ \checkmark$$

$$\frac{d}{dz}\sin z=\frac{ie^{iz}-(-ie^{-iz})}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\ \checkmark$$

ה) נבדוק זהות טריג' מפורסמת

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}-2}{4} + \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4} = 1$$

כמו-כן, כל הזהויות הידועות נכונות במרוכבים (נוכיח בהמשך הקורס).

ו) אי-שוויונים לא תמיד נשארים בתוקף.

אם $x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$

אבל אם $z\in\mathbb{C}$, $z=iy$, נרשום

$0 \ll y$

$$\cos iy = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \approx \frac{e^{y}}{2} \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$$

ז) הפונ' הטריג' נשארות מחזוריות

$$\cos(z+2\pi)=\cos z, \quad \sin(z+2\pi)=\sin z$$

ח) נכתוב $z=x+iy$

$$\Rightarrow \cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy =$$

$$= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

$$\Rightarrow \sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \sin iy\cos x =$$

$$= \sin x\cosh y + i\sinh y\cos x$$

ט) נגדיר $tg z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $ctg(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ וגם אז כל הנגזרת והזהויות עובדות ללא שינוי.

⑥ הערות: אם $n\in\mathbb{Z}$ אזי z^n כבר מוגדר.
כבר ראינו שאם $n\in\mathbb{N}$, ו-$z\neq 0$, אזי יש בדיוק n מספרים
שונים ש-$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$
בפשטות - אם $z=re^{i\theta}$ אזי $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$
וה-θ בעייתית כידוע. אם נבחר ענף של $\theta=\arg z$
נקבל פונק' אמיתית.
למשל: הענף הראשי של $z^{\frac{1}{n}}$ נתון ע"י $z^{\frac{1}{n}}=|z|^{1/n}e^{\frac{i\operatorname{Arg} z}{n}}$
פונק' זו לא רציפה (⇐ לא אנליטית) בקרן השמאלית של ציר x.
נתקדם לפונק' $f(z)=z^{\alpha}$, $z\in\mathbb{C}$, α קבוע.
נרשום
$z^{\alpha}=e^{\log z^{\alpha}}=e^{\alpha\log z}$
ואם נבחר ענף כלשהו של $\log z$ נקבל ענף
אנליטי של z^{α}, למשל $z^{\alpha}=e^{\alpha\operatorname{Log} z}$.
לפי כלל השרשרת -
$$\frac{d}{dz}z^{\alpha}=\frac{d}{dz}e^{\alpha\log z}=e^{\alpha\log z}\frac{\alpha}{z}=\frac{z^{\alpha}\alpha}{z}=\alpha z^{\alpha-1}$$
⑦ נגדיר $\arccos z$. לפי הגדרה,
$$w=\arccos z \iff z=\cos w \iff z=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$$
עלינו להפוך נוסחה זו לקבלת $w(z)$.
ובכן:
$$z=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\iff 2z=e^{iw}+e^{-iw}\iff e^{2iw}+1=2ze^{iw}$$
$$\iff e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0\Rightarrow e^{iw}=\frac{2z\pm\sqrt{4z^2-4}}{2}=z\pm\sqrt{z^2-1}$$
$$\Rightarrow iw=\log(z\pm\sqrt{z^2-1})\Rightarrow w=-i\log(z\pm\sqrt{z^2-1})$$
$$\Rightarrow \arccos z=w=-i\log(z\pm\sqrt{z^2-1})$$
זאת פונק' רב ערכית
צריך לבחור ענף
של $\log$, $\sqrt{z}$.

כבר למדנו שאם $f=u+iv$ אנליטית אזי

אזי בינתיים אין הגבלה על u,v חוץ $\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$ מזה שהן דיפר'.

אם נניח ש-$u,v\in C^2$ אזי $\begin{cases} u_{xx}=v_{yx} \\ u_{yy}=-v_{xy} \end{cases} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0$

לכן $u=\mathrm{Re}f$ פונק' <u>הרמונית</u> לפי

<u>הגדרה:</u> פונק' הרמונית היא פונק' המקיימת את משוואת לפלס, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$.

<u>אבל</u> אם f אנליטית גם $-if$ אנליטית, $-if=v-iu$

לכן גם $\mathrm{Re}(-if)=v$ הרמונית!

<u>הגדרה:</u> נניח ש-u פונק' הרמונית בתחום $D\subset\mathbb{R}^2$.
אומרים שפונק' הרמונית $v:D\to\mathbb{R}$ צמודה ל-u אם $u+iv$ אנליטית ב-D.

פונקציה הרמונית

כבר למדנו שאם $f=u+iv$ אנליטית אז $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

כלומר יש קשר הדוק בין u ל-v . ...

אבל בינתיים לא מצאנו הקבלה של u לבד חוץ מזה שהוא דיפרנציאבילית.

אמנם אם נניח ש- $u,v\in C^2$, אז $u_{xx}=v_{yx}$ ו- $u_{yy}=-v_{xy}$

לכן- $u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0$, לכן - $u=Re f$ $\boxed{\text{פונקציה הרמונית}}$,

כי לפי הגדרה $\boxed{\text{פונק' הרמונית}}$ היא פונק' המקיימת את משוואת לפלס- $u_{xx}+u_{yy}=0$

מצאנו שאם f אנליטית, $u=Re f$ הרמונית,

אבל אם f אנליטית גם $-if=-i(u+iv)=v-iu$ אנליטית, לכן $v=Re(-if)$ הרמונית.

<u>הערה:</u> נניח ש-u פונק' הרמונית בתחום $D\subset\mathbb{R}^2$. אומרים שפונק' הרמונית $v: D\to\mathbb{R}$ $\boxed{\text{צמודה}}$ ל-u אם $u+iv$ אנליטית ב-D .

דוגמאות חישוב:

1. לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ נגדיר $u(x,y)=x^3-3xy^2+2x$. הוכח שu הרמונית ב-$\mathbb{R}^2$ ומצא לה פונק' צמודה v.

<u>פתרון:</u> $u_x=3x^2-3y^2+2$, $u_{xx}=6x$, $u_y=-6xy$, $u_{yy}=-6x$

לכן $u_{xx}+u_{yy}=6x-6x=0$ ו-u הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$.

נחפש פונק' צמודה $v(x,y)$. כלומר u,v מקיימות קושי רימן: $v_x=-u_y=6xy$, $v_y=u_x=3x^2-3y^2+2$

אז- $v(x,y)=\int 6xy\,dx=3x^2y+h(y)$ כש- h תלויה רק ב-y,

יתר על כן- $3x^2-3y^2+2=v_y=3x^2+h'(y)$. לכן- $h(y)=\int(-3y^2+2)dy=-y^3+2y+c$

לכן- $v(x,y)=3x^2y+h(y)=3x^2y-y^3+2y+c$, וגם אפשר שהפונק' הצמודה נקבעת באופן יחיד עד כדי קבוע.

2. נגדיר $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

u הרמונית ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ כי $u(x,y)=Re\log(x+yi)$

הפונק' הצמודה צריכה להיות $arg(x+yi)=arctg(\frac{y}{x})$, אבל כידוע אי אפשר להגדיר את $arg(x+yi)$ כפונק' רציפה בתחום $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ לכן לא קיימת ל-u פונק' צמודה בתחום זה.

בסביבה G של נקודה $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, אפשר להגדיר ענף רציף של $arg(x+yi)$

והפונק' זו צמודה ל-u. אבל קיבלנו ב-$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ אין ל-u פונק' צמודה.

אינטגרציה

נדבר על שני סוגי אינטגרלים.

אינטגרל מסוג ראשון:

אינטגרל מהסוג $\int_a^b z(t)dt$ כאשר $z(t)=x(t)+iy(t)$

$z:[a,b]\to\mathbb{C}$, $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

ובכן: אם $z(t)$ פונק' מוגדרת ורציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$ נעשה חלוקה P של הקטע

$a=t_0<\dots<t_n=b$

בכל תת-קטע $[t_{k-1},t_k]$ נבחר נק' t'_k ונבנה סכום רימן $\sum_{k=1}^{n} z(t'_k)\underbrace{\Delta t_k}_{t_k-t_{k-1}}$ ונגדיר $\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta t_k$

לפי הגדרה, $\lambda(P)\to 0 \Leftarrow$ כל סכומי רימן של החלוקות שואפים לגבול אחד, נאמר כי $z(t)$ אינט' על $[a,b]$ והאינט' $\int_a^b z(t)\,dt$ הוא הגבול של סכומי הרימן.

אבל נו פשוט נרשום $z(t)=x(t)+iy(t)$ ונראה שסכומי רימן מתפרקים בהתאם:

$$\sum_{k=1}^{n} z(t'_k)\Delta t_k=\sum_{k=1}^{n}\left(x(t'_k)+iy(t'_k)\right)\Delta t_k=\sum_k x(t'_k)\Delta t_k+i\sum_k y(t'_k)\Delta t_k$$

$z(t)$ רציפה למקוטעין $\xRightarrow{\text{אינט' 2}}$ גבול סכומי רימן קיים ושווה

$$\int_a^b x(t)dt+i\int_a^b y(t)dt=\int_a^b z(t)dt$$

משפט 1: תכונות האינטגרל (מסוג רימן)

נניח $z(t)$, $w(t)$ פונק' מרוכבות רציפות למקוטעין בקטע ממשי $[a,b]$, ונניח $c\in\mathbb{C}$ קבוע. אזי:

א) $$\int_a^b w\pm z\,dt=\int_a^b w\,dt\pm\int_a^b z\,dt$$

ב) $$c\int_a^b z\,dt=\int_a^b cz\,dt$$

ג) $$\left|\int_a^b z(t)dt\right|\le\int_a^b |z(t)|\,dt$$

ד) אם $z'(t)$ קיימת ורציפה ב-$[a,b]$ אזי
$$\int_a^b z'(t)dt=z(b)-z(a)$$
נוסחת ניוטון-לייבניץ

ה) אם $z'(t)$ קיימת ורציפה ב-$[a,b]$ אזי
$\int_a^b |z'(t)|dt=$ אורך המסילה המתוארת ע"י $z(t)$ מן a עד b.

הוכחה

א) טריוויאלי

ב) סכום רימן ל-$\int_a^b cz\,dt$:
$$\sum_{k=1}^n c\,z(t_k')\Delta t_k=c\sum_k z(t_k')\Delta t_k$$
$$\overset{\text{בגבול}}{\Longrightarrow}\int_a^b cz\,dt=c\int_a^b z\,dt$$

ג) סכום רימן עבור $\left|\int_a^b z\,dt\right|$:
$$\left|\sum_{k=1}^n z(t_k')\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ממשי לא}\\ \text{שלילי}}}{\Delta t_k}\right|\le\sum_k |z(t_k')|\Delta t_k$$
$$\overset{\text{בגבול}}{\Longrightarrow}\left|\int_a^b z\,dt\right|\le\int_a^b |z|\,dt$$

(ג)

$$\int_a^b z'(t)dt = \int_a^b (x'(t)+iy'(t))dt = \int_a^b x'(t)dt + i\int_a^b y'(t)dt$$

$$= x(b)-x(a)+i(y(b)-y(a)) = z(b)-z(a)$$

(ה) מאינפי 4 אורך המסילה הוא

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = \int_a^b |z'(t)|dt$$

אינטגרלים מסוג שני

אינטגרלים של פונק' $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

מקובל לדבר על אינט' מסילתיים.

ובכן: נניח כי γ היא מסילה במישור, ו-$f(z)$ פונק' מוגדרת ורציפה למקוטעין לאורך γ.

כדי להגדיר $\int_\gamma f(z)dz$ נעשה חלוקה של γ ע"י נק' $z_0, z_1, \dots, z_n$ שהולכות מתחילת γ עד סופה לפי הכיוון של γ.

בין כל z_{k-1} ו z_k נבחר נק' z_k' ונבנה סכום רימן

$$\sum_{k=1}^n f(z_k')\Delta z_k = \sum_{k=1}^n f(z_k')(z_k - z_{k-1})$$

נגדיר $\lambda(P) = \max_{1\le k\le n} \Delta z_k$.

לפי הגדרה $\int_\gamma f(z)dz$ הוא הגבול כאשר $\lambda(P)\to 0$ של כל סכומי רימן.

חישוב מעשי

נניח של-γ יש פרמטריזציה $z=z(t)$ $(a\le t\le b)$

כאשר $z(t)$ רציפה ובעלת נגזרת $z'(t)$ רציפה למקוטעין.

נעשה חלוקה של $[a,b]$, $a=t_0<\dots<t_n=b$.

היא משרה חלוקה של $z(t)$, $z(t_0),\dots,z(t_n)$

נבנה סכום רימן:

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k')\Delta z_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(z(t_k'))(z(t_k)-z(t_{k-1}))$$

זה שווה ל-

$$\sum_k f(z(t_k'))\frac{z(t_k)-z(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}(t_k-t_{k-1})\approx\sum_k f(z(t_k'))z'(t_k)\Delta t_k$$

~~בערך~~
אין ערך!

הגענו לסכום רימן עבור אינט' מסוג ראשון.

כאשר $\to 0$ זה שואף ל $\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$

<u>פורמלית</u>, מחשבים אינט' מסוג שני ע"י הצבה:

אם נתון $\int_\gamma f(z)dz$ נבחר פרמטריזציה ל-γ

$z=z(t)$, $a\le t\le b$

ונרשום $z'(t)=\frac{dz(t)}{dt}$. פורמלית $dz=z'(t)dt$ ונציב

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

15/3

קוג'

(א) $\int_\gamma \bar{z}\,dz$, γ = קשת מעגל היחידה מ-1 עד $e^{\pi i/3}$

תשובה

מעגל היחידה הוא $z=e^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi/3$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta}=ie^{\theta i},\ dz=ie^{i\theta}d\theta,\ \bar{z}=e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z}\,dz=\int_0^{\pi/3}\cancel{e^{-i\theta}}\,i\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta=i\pi/3$$

(ב) $\int_{\gamma_1}\bar{z}\,dz$ כאשר γ_1 = הקו הישר בין 0 ל-$e^{\pi i/3}$

תשובה:

גילוי סוד: הקטע הישר בין z_1 ו-z_2 נתון ע"י

$z(t)=z_1+t(z_2-z_1)$, $z(0)=z_1$ ו-$z(1)=z_2$

והפונק' לינארית ב-t.

אצלנו, $\gamma_1 = z(t)=1+t(e^{i\pi/3}-1),\ 0\le t\le 1$

$$\Rightarrow \bar{z}=1+t(e^{-i\pi/3}-1),\ dz=(e^{i\pi/3}-1)dt$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1}\bar{z}\,dz=\int_0^1\left(1+t(e^{-i\pi/3}-1)\right)(e^{i\pi/3}-1)\,dt=$$

$$=(e^{i\pi/3}-1)\left[t+\frac{t^2}{2}(e^{-i\pi/3}-1)\right]\Bigg|_0^1=(e^{i\pi/3}-1)\left[1+\frac{1}{2}(e^{-i\pi/3}-1)\right]$$

$$\neq\int_\gamma \bar{z}\,dz$$

בפרט, האינט' תלוי במסילה.

זאת מכיוון שהקצוות של γ,γ_1 זהות אבל האינט' לא שווה.

22/3 ד

סימון: אם $z_0\in\mathbb{C}$ ואם $r>0$ נסמן

$$B(x_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<r\}$$

$$\overline{B(x_0,r)}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|\le r\}$$

$$C(x_0,r)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|=r\}$$

בפרט, $C\cup B=\overline{B}$.

דוג׳: נקבע $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$, $n\in\mathbb{N}$ ונחשב

$$\oint_{C(z_0,r)} \frac{1}{(z-z_0)^n}dz$$

חישוב: תחילה נרשום פרמטריזציה סטנדרטית ל $C(z_0,r)$.

ובכן אם $r=|z-z_0|$ אזי $z-z_0=re^{i\theta}$ $\theta\in[0,2\pi]$

$\Leftarrow z-z_0=re^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$ $\Rightarrow z=z_0+re^{i\theta}$

כאשר θ הולכת מ-0 ל 2π, z מקיף את $C(z_0,r)$ נגד כיוון השעון.

כעת אם $z=z_0+re^{i\theta}$, $dz=ire^{i\theta}d\theta$

$$\Rightarrow (z-z_0)^n=(re^{i\theta})^n \Rightarrow \oint_{C(z_0,r)}\frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(re^{i\theta})^n}ire^{i\theta}d\theta$$

אם $n=1$ האינט׳ הוא $\int_0^{2\pi} i\,d\theta = \underline{2\pi i}$

אם $n\neq1$ האינט׳ הוא

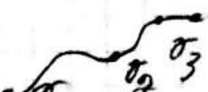
$$\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{r^ne^{in\theta}}d\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{r^{n-1}(1-n)}-\frac{1}{r^{n-1}(1-n)}=\boxed{0}$$

$$\Rightarrow \oint_{C(z_0,r)} \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$ <u>ב"ת ב z_0, r</u>

<u>הגדרה:</u> אם γ היא מסילה במישור, אזי $-\gamma$ היא אותה המסילה בכיוון ההפוך.

<u>הגדרה:</u>



במצב כזה נרשום

$\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$.

<u>משפט 2:</u> נניח ש-γ מסילה חלקה במישור, ונניח כי $f(z)$, $g(z)$ פונק' מוגדרות ורציפות למקוטעין על γ, ו-$c\in\mathbb{C}$ קבוע.

<u>אזי:</u>

(א) $\int_\gamma f(z)dz$ ב"ת בפרמטריזציה של γ.

(ב) $\int_\gamma (f+cg)dz = \int_\gamma f dz + c\int_\gamma g dz$ (האינט' לינארי)

(ג) $\int_{-\gamma} f dz = -\int_\gamma f dz$

(ד) אם $\gamma=\gamma_1+\dots+\gamma_n$ אזי $\int_\gamma f dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f dz$

(ה) $\left|\int_\gamma f dz\right| \le ML$, כאשר L=אורך γ, $M=\sup_{z\in\gamma} |f(z)|$

22/3

הוכחה:

(א) מלכתחילה הגדרנו $\int_\gamma f(z)dz$ כגבול סכומי רימן של γ בלי פרמטריזציה. לכן באופן אוטומטי האינט' ב"ת בפרמטריזציה של γ.

(ב) סכום רימן עבור $\int_\gamma (f+cg)dz$ הוא מהצורה

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k')\Delta z_k + c\sum_{k=1}^{n} g(z_k')\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[f(z_k')+cg(z_k')\right]\Delta z_k$$

נשאיף $\lambda(P)\to 0$ נקבל

$$\int_\gamma (f(z)+cg(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + c\int_\gamma g(z)dz$$

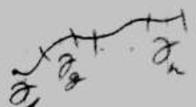
(ג) נעשה חלוקה ל-$-\gamma$: $z_n, \dots, z_1, z_0$ ונבחר נק' בינ"ק z_k' כרגיל.
סכום רימן עבור $\int_{-\gamma} f(z)dz$ הוא

$$f(z_n')(z_{n-1}-z_n)+f(z_{n-1}')(z_{n-2}-z_{n-1})+\dots+f(z_1')(z_0-z_1)=$$

$$=-\left[f(z_1')(z_1-z_0)+f(z_2')(z_2-z_1)+\dots+f(z_n')(z_n-z_{n-1})\right]$$

וזה מינוס סכום רימן עבור $\int_\gamma f(z)dz$. נשאיף $\lambda(P)\to 0$ נקבל $\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$.

(ד)



פשוט שסכום רימן עבור $\int_\gamma f(z)dz$ הוא סכום של סכומי רימן עבור האינט' $\int_{\gamma_k} f(z)dz$, $1\le k\le n$.
לכן נשאיף $\lambda(P)\to 0$ נקבל $\int_\gamma f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz$.

(ב) כרגע נרשום סכום רימן עבור $\int_\gamma f(z)dz$ אזי

$$\left|\sum_{k=1}^n f(z_k')(z_k-z_{k-1})\right| \le \sum_{k=1}^n |f(z_k')||z_k-z_{k-1}| \le$$

$$\le_{\text{ג}} \sum_{k=1}^n M|z_k-z_{k-1}| = M\sum_{k=1}^n |z_k-z_{k-1}|$$

אבל הדרך הקצרה ביותר בין שתי נק' היא הקו הישר בינהן

לכן $\sum_{k=1}^n |z_k-z_{k-1}| \le L \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^n f(z_k')(z_k-z_{k-1})\right| \le ML$.

זה מתקיים עבור כל סכום רימן. נשאיף [illegible] נקבל

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le ML$$

ומש"ל

משפט 3: נניח ש-γ מתוארת ע"י $z(t);\ a\le t\le b$, ו-$z'(t) \in C[a,b]$. עוד נניח ש-$f(z)$ גזירה ויש נגזרת רציפה $f'(z)$ לאורך γ.

אם γ הולכת מ-z_1 ל-z_2 אזי

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(z_2)-f(z_1)$$

הוכחה:

ע"פ פרמטריזציה:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f'(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(z(t))dt$$

(ע"פ כלל השרשרת)

זהו אינט' מסוג ראשון, עבורו ממשפט 1 מתקיים ניוטון-לייבניץ!

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(z(t))dt = f(z(t))\Big|_a^b = f(z(b))-f(z(a)) =$$

$$= f(z_2)-f(z_1)$$

22/3

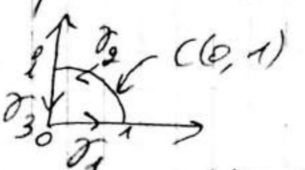
<u>מסקנה:</u> נניח כי $f(z)$ רציפה ב-D ובעלת פונק' קדומה $F(z)$ לאורך γ.
אם γ הולכת מ-z_1 ל-z_2 אזי

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

ניוטון-לייבניץ במרוכבות!

<u>דוג'</u> (ממבחן)

כד' $\int_\gamma z^n \bar{z}\,dz$ עבור $n\in\mathbb{N}$



<u>פתרון:</u> $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \underset{\text{משפט 2}}{\Longrightarrow} \int_\gamma = \sum_{k=1}^{3}\int_{\gamma_k}$

ופרמטריזציה.
אבל יש דרך אחרת!

<u>יותר יפה:</u> ב-γ_1 $z=\bar{z} \Leftarrow \int_{\gamma_1} z^n\bar{z}\,dz = \int_{\gamma_1} z^{n+1}\,dz$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} z^n\bar{z}\,dz = \frac{z^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

ב-γ_2, $1 = z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_2} z^n\bar{z}\,dz = \int_{\gamma_2} z^{n-1}\,dz = \frac{z^n}{n}\Big|_1^i = \frac{i^n-1}{n}$$

ב-γ_3, $\bar{z} = -z \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_3} z^n\bar{z}\,dz = \int_{\gamma_3} -z^{n+1}\,dz = -\frac{z^{n+2}}{n+2}\Big|_i^0 = \frac{i^{n+2}}{n+2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma z^n\bar{z}\,dz = \frac{1}{n+2} + \frac{i^n-1}{n} + \frac{i^{n+2}}{n+2}$$

משפט 4: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר.
נניח $f(z)$ מוגדרת ורציפה ב-D.
אזי התנאים הבאים שקולים:

א) יש ל-f פונק' קדומה φ, כך שלכל $z\in D$, $\varphi'(z)=f(z)$

ב) אינט' של f במסילות ב-D בלתי תלויים במסילה, אלא רק בקצוות המסילה.

ג) לכל מסילה סגורה γ ב-D, $\int_\gamma f(z)dz=0$

הוכחה

א⇐ב

אם γ מסילה ב-D מ-z_1 ל-z_2, המסקנה למשפט 3 אומרת $\int_\gamma f(z)dz=\varphi(z_2)-\varphi(z_1)$ שתלוי רק בקצוות z_1, z_2 ולא ב-γ.

ב⇐ג

אם γ מסילה סגורה ב-D, נבחר $z_1\in\gamma$ וניתן לומר ש-γ הולכת מ-z_1 ל-z_1. לפי ב',

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{z_1}^{z_1} f(z)dz,\quad \left|\int_{z_1}^{z_1} f(z)dz\right|\le M\underset{0}{L}=0$$

$\Leftarrow$ $\int_\gamma f(z)dz=0$.

ג⇐ב

ניקח 2 מסילות γ_1, γ_2 ב-D מ-z_1 ל-z_2.
אזי $\gamma_1+(-\gamma_2)$ מסילה סגורה ב-D.
לפי ג',
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz-\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{-\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} f(z)dz=0$$

$\Leftarrow$ $\int_{\gamma_1} f dz=\int_{\gamma_2} f dz$ כדרוש.

ב ⇐ א

צ"ל אם אינט' של f ב-D בת"ת במסילה, קיימת ל-f פונק' קדומה F ב-D.

ובכן נבחר $z_0 \in D$ ולכל $z \in D$ נגדיר $F(z)=\int_\gamma f(w)dw$,
כאשר γ מסילה כלשהי מ-z_0 ל-z
(באינפי 3 ראינו פתיחות + קשירות ⇐ קשירות מסילתית)
(ולכן יש מסילה שכזו)

לפי ב $F(z)$ לא תלוי"ה ב-γ, לכן היא מוגדרת היטב.

<u>טענה:</u> F גזירה בכל D ו-$F'(z)=f(z)$ לכל $z\in D$.

<u>הוכחת הטענה:</u> תהי $z\in D$. D פתוח, לכן יש $r>0$ כך ש $B(z,r)\subset D$. נקבע מסילה γ ב-D מ-z_0 ל-z.
אם $|\Delta z|<r$ אזי הקטע הישר מ-z ל-$z+\Delta z$ המסומן $[z,z+\Delta z]\subset D$.

לפי הגדרה, $F(z+\Delta z)=\int_{\gamma_1} f(w)dw$ כאשר γ_1 מסילה מ-z_0 ל-$z+\Delta z$.
נבחר $\gamma_1=\gamma+[z,z+\Delta z]$.

לכן
$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{\gamma+[z,z+\Delta z]} f(w)dw-\int_\gamma f(w)dw=\int_{[z,z+\Delta z]} f(w)dw$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(w)dw$$

עוד נעיר ש
$$\int_{[z,z+\Delta z]} f(\underline{\underline{z}})dw=f(\underline{\underline{z}})w\Big|_z^{z+\Delta z}=f(\underline{\underline{z}})\Delta z$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(z)dw$$

מכאן נקבל (לפי חיסור)

$$\frac{\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{(z,z+\Delta z)}[f(w)-f(z)]dw$$

נתון כי f רציפה ב-D ובפרט בנק' z.

יהי $\epsilon>0$ נתון.

אזי יש $\delta>0$ כך שאם $|w-z|<\delta$ מתקיים $|f(w)-f(z)|<\epsilon$

כעת אם $|\Delta z|<\delta$, אזי לכל $w\in[z,z+\Delta z]$, $|w-z|<\delta$.

ממילא $|f(w)-f(z)|<\epsilon$. לכן

$$\left|\frac{\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]}(f(w)-f(z))dw\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\overset{\epsilon}{M}\cdot\overset{|\Delta z|}{L}\le$$

$$<\frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z|=\epsilon$$

בגבול $\Delta z\to 0$ נקבל לפי הגדרת הגבול

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)}{\Delta z}-f(z)=0$$

$\Leftarrow$ $\varphi'(z)$ קיימת ושווה ל-$f(z)$ לכל $z\in D$. מש"ל

נחזור לדוגמ' $\oint_{C(z_0,r)}\frac{1}{(z-z_0)^n}dz$

עבור שאר ה-n-ים, לפונק' $(z-z_0)^{-n}$ יש פונק' קדומה $\frac{(z-z_0)^{-n+1}}{-n+1}$ $(z\ne z_0)$. $C(z_0,r)$ לא מכיל את הסינגולריות $z=z_0$ וכיוון ש $C(z_0,r)$ סגור, משפט 4 מבטיח שהאינט' שווה 0.

עבור $n=1$ האינט' הוא $\oint_{C(z_0,r)}\frac{1}{z-z_0}dz$ ולכאורה גם כאן יש פונק' קדומה $\log(z-z_0)$.

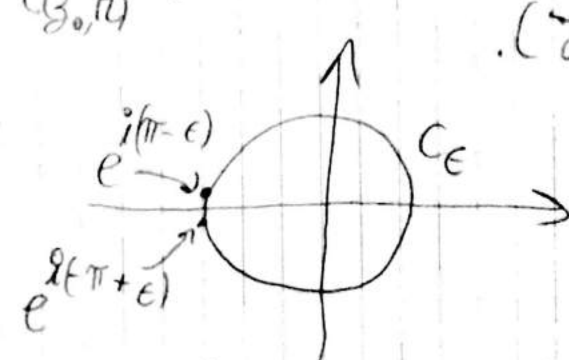
__אבל__ מצאנו שהאינט' שווה $2\pi i\ne 0$!

22/3

ד

מה קורה מכיוון שאין ניתן להגדיר את $\log(z-z_0)$
כפונק' גזירה כאן אפילו רציפה על $C(z_0,r)$.
בכל זאת נראה שניתן לחשב את $\oint_{C(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}\,dz$
ע"פ משפט 3 (ניוטון-לייבניץ).

מקרה ראשון



$z_0=0$ ונסתכל על $\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z}\,dz$

ונשים ש-

$$\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{C_\epsilon} \frac{1}{z}\,dz$$

אבל על C_ϵ יש פונק' קדומה ל- $\frac{1}{z}$, $Log(z)$

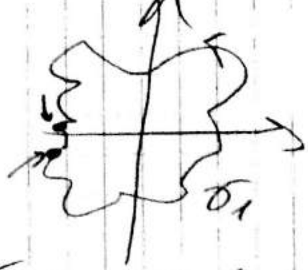
$\Leftarrow$

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{1}{z}\,dz = Log(z)\Big|_{e^{i(-\pi+\epsilon)}}^{e^{i(\pi-\epsilon)}} = i(\pi-\epsilon) - i(-\pi+\epsilon) = 2\pi i - 2i\epsilon$$

בגבול נקבל $\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$

תרגיל

$\int_{\sigma_1} \frac{1}{z}\,dz$

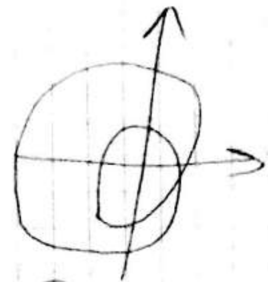


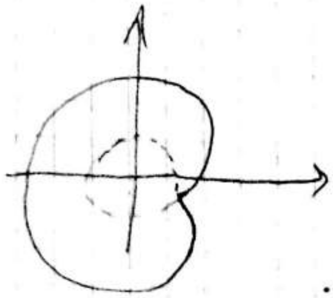
עדיין $2\pi i$ בדומה למקודם

נבחר את שתי נק' הקצה, נקבל $2\pi i - 2i\epsilon \to 2\pi i$

תרגיל נוסף

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz$$





פתרון: ניתן לחלק לשתי מסילות -
נקבל $4\pi i$.

הגדרה: תהי γ מסילה סגורה ב-$\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
נגדיר $\text{Ind}_\gamma(0)$ להיות מס' ההקפות של γ סביב
נגד כיוון השעון.

$\Leftarrow$ מתקיים $\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \cdot \text{Ind}_\gamma(0)$

הכללה: אם γ מסילה סגורה ב$\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, נגדיר את $\text{Ind}_\gamma(z_0)$
להיות מס' ההקפות של γ סביב z_0 נגד כיוון השעון.

$\Leftarrow$ $\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \cdot \text{Ind}_\gamma(z_0)$

בקיצור: מצאנו שאם ל-$f(z)$ יש פונק' קדומה לאורך מסילה
סגורה γ אזי $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

מה קורה כאשר לא ידועה פונק' קדומה אבל $f(z)$ בעצמה
אנליטית?

דוג' e^{z^2}, $z^3\sin z$. האם בהכרח $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$?
באופן כללי לא, כפי שראינו עם $\oint_{(0,1)} \frac{1}{z}\,dz$.

אבל משפט קושי אומר שאם f אנליטית גם בפנים של γ
אזי $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

משפט 5: (הוכחה כיפית למשפט קושי)

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ
כסגורה ולא חותכת את עצמה.
נניח ש $f(z)$ אנליטית ב- $\bar{D} = D \cup \gamma$.
אזי $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

הוכחה: נרשום $f = u + iv$.
אזי

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int u\,dy + v\,dx$$

$$\overset{\text{גרין}}{=} \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$$

אבל f אנליטית ב- $\bar{D}$ $\Leftarrow$ u,v מקיימות את קושי רימן ונקבל

$$\iint_D 0\,dx\,dy + i\iint_D 0\,dx\,dy = 0$$

$\Leftarrow$ $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ ומש"ל

מה רע בהוכחה הנ"ל?
כלום, אלא שצריכים שהנגזרות החלקיות של u ו- v
יהיו רציפות ב- $\bar{D}$ וש- D הוא "תחום גרין" בו משפט גרין מתקיים.
$f'(z) \in C(\bar{D})$

למה 1: נניח ש $f(z)$ מוגדרת בסביבות z_0
וגזירה ב z_0.
אזי בסביבת z_0 מתקיים

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\epsilon(z)(z-z_0)$$

כאשר $\lim_{z\to z_0}\epsilon(z)=0$

(זהו בעצם דיפרי' של f ב-z_0)

הוכחה: נגדיר

$$\epsilon(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)$$

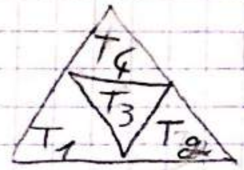
לפי הגדרת הנגזרת $\lim_{z\to z_0}\epsilon(z)=0$

נעביר אגף לקבלת $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\epsilon(z)(z-z_0)$

ומש"ל

הגדרה: אם D תחום כלשהו ב-$\mathbb{C}$, נסמן את שפתו ∂D.

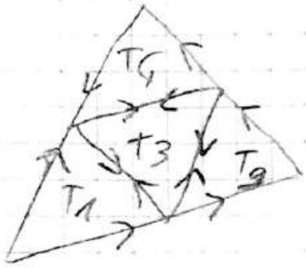
למה 2: נניח ש-T משולש ב-$\mathbb{C}$.



נחלק את T ל-4 משולשים ע"י
הנק' האמצעיות של הצלעות.
אם $f(z)$ רציפה ב-T,

$$\oint_{\partial T} f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{4}\oint_{\partial T_k} f(z)\,dz$$

הוכחה: (בציור)



לפי הכיוונים שבחרנו,
בסכום $\sum_{k=1}^{4} \oint_{\partial T_k} f(z)dz$

האינט' על כל הצלעות של T_3 מתבטלים, ונשאר
בדיוק $\oint_{\partial T} f(z)dz$. מש"ל

הערה: התוצאה של למה 2 הרבה יותר כללית.

משפט 6: (משפט קושי-גורסה)

יהי $T \subset \mathbb{C}$ משולש. נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית
ב-T (כולל ∂T).
אזי $\oint_{\partial T} f(z)dz = 0$.

הוכחה: נגדיר $\left|\oint_{\partial T} f(z)dz\right| = \alpha$

נחלק את T למשולשים, $T_1',\dots,T_4'$.

לפי למה 2, $\oint_{\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \oint_{\partial T_k'} f(z)dz$.

לפחות אחד מהאינט' הנ"ל גדול או שווה $\frac{\alpha}{4}$.

נסמן אותו T_1: $\left|\oint_{\partial T_1} f(z)dz\right| \ge \frac{\alpha}{4}$

נחלק את T_1 בהתאם ללמה 2 ונקבל עוד תת-משולש
$T_2 \subset T_1$ כך ש $\left|\oint_{\partial T_2} f(z)dz\right| \ge \frac{\alpha}{16}$.

נמשיך תהליך זה ∞ פעמים לקבלת סדרה של משולשים
$T \supset T_1 \supset T_2 \supset T_4 \dots$

9913

כך שלכל משולש T_n, $\left|\oint_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{2}{4^n}$.

לפי למת קנטור, $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$ = נק' אחת ב-T, נסמן z_0.

אבל f אנליטית ב-z_0!

לכן $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\epsilon(z)(z-z_0)$

לפי למה 1.

כעת נגדיר לכל n, $\epsilon_n=\sup_{z\in T_n}|\epsilon(z)|$ (קבוע)

כיוון שכל T_n מכיל את z_0, והקוטר של T_n שואף

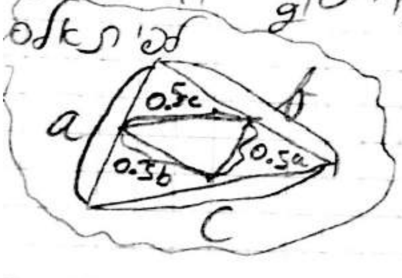
ל-0, עבור n גדול כל הנקודות ב-T_n קרובות

כרצוננו ל-z_0, ומלמה 1 נקבל

$$\lim_{z\to z_0}\epsilon(z)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\epsilon_n=0$$

עוד נעיר, שלפי אופן החלוקה בלמה 2,

$|\partial T_1|=\frac{1}{2}|\partial T|$, $|\partial T_2|=\frac{1}{2}|\partial T_1|=\frac{1}{4}|\partial T|$, $|\partial T_n|=\frac{1}{2^n}|\partial T|$



ועבור כל n יתקיים

$$\oint_{\partial T_n} f(z)\,dz=\int_{\partial T_n}\left[f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\epsilon(z)(z-z_0)\right]dz=$$

$$=\oint_{\partial T_n}\epsilon(z)(z-z_0)\,dz$$

זאת משום של-$f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ יש פונק' קדומה

גלובלית $f(z_0)z+f'(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2}$ ולכן האינט' שלה

על כל מסילה סגורה מתאפס.

עבור כל n,

$$\frac{2}{4^n} \le \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_n} \epsilon(z)(z-z_0)dz\right| \le ML$$

כבר חישבנו $L = \frac{|\partial T|}{2^n}$

סוג "ידוע" שב- ∂T_n $|\epsilon(z)| \le \epsilon_n$,

$|z-z_0|$ = המרחק מ-z ל-$z_0 \in T$ כאשר $z \in \partial T_n$.

מרחק זה ודאי קטן מהיקף של ∂T_n שהוא $\frac{|\partial T|}{2^n}$

לכן $0 \le \frac{2}{4^n} \le \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \le ML \le \epsilon_n \frac{|\partial T|}{2^n}\frac{|\partial T|}{2^n}$

$\Longleftarrow$ $0 \le 2 \le \epsilon_n |\partial T|^2$ (צימצמנו ב-4^n).

זה נכון לכל n! נשאיף $n \to \infty$ לקבלת

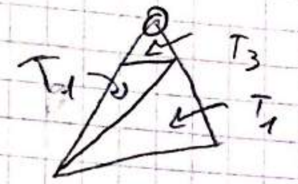
$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \underset{\text{הגדרת } 2}{=} 2 = 0$. מש"ל

<u>מסקנה:</u> משפט 6 נכון גם אם נניח ש-$f(z)$ רציפה ב-T ואנליטית ב-T פרט לנק' אחת.

29/3

5

<u>הוכחה</u>: במקרה ראשון נניח שהנק' של אי אנליטיות היא בקדקד



עפ"י עקרון החלוקה (למה 2),

$$\oint_{\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^{3} \oint_{\partial T_k} f(z)dz$$

כאשר הנק' הסינגולרית ב-∂T_3.

עפ"י משפט 6, עבור $k=1,2$ נקבל $\int_{\partial T_k} f(z)dz = 0$

(כי T_1, T_2 משולשים בלי נק' סינגולריות!)

אם נגדיר $M = \max_{z \in T} |f(z)|$ נקבל

$$\left|\int_{\partial T_3} f(z)dz\right| \le ML = M|\partial T_3|$$

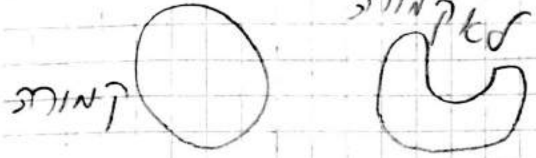
אבל $|\partial T_3|$ קטן כרצוננו, ולכן

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial T_k} f(z)dz = 0$$

במקרה הכללי, אם z_0 הנק' הסינגולרית, נוכל לחלק את T לשלושה משולשים שבכל אחד מהם z_0 נק' שפה.

מהמקרה הראשון $\oint_{\partial T} f(z)dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial T_k} f(z)dz = 0$

הגדרה: קב' $D\subset\mathbb{C}$ נקראת קמורה אם
לכל שתי נק' $z_1,z_2\in D$ הקטע הישר ביניהן
$[z_1,z_2]$ נשאר כולו ב-D



משפט 7: (משפט קושי בתחום קמור)
תהי $D\subset\mathbb{C}$ פתוחה וקמורה.
נניח $f(z)$ מוגדרת ורציפה ב-D ואנליטית
ב-D פרט לנק' אחת לכל היותר.
אזי עבור כל מסילה סגורה γ ב-D

$$\oint_\gamma f(z)dz=0.$$

הוכחה: לפי משפט 4 מ"ל שיש פונק' קדומה
ל-$f(z)$ ב-D.
נבחר נק' כלשהי $z_0\in D$ ולכל $z\in D$ נגדיר

$$F(z)=\int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$

טענה: לכל z ב-D, $F'(z)$ ק"מת ושווה $f(z)$.

הוכחה: יהי $z\in D$. לכן יש $B(z,r)\subset D$ (כי D פתוחה),
סכת.
אם $|\Delta z|<r$, אזי הקטע מ-z ל-$z+\Delta z$ כולו ב-D.
לפי הגדרה,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{[z_0,z+\Delta z]} f(w)dw-\int_{[z_0,z]} f(w)dw$$

לפי משפט קושי במשולש (כמשפט 6 שלנו), נקבל:

$$\int_{[z_0,z]} f(w)dw + \int_{[z,z+\Delta z]} f(w)dw + \int_{[z+\Delta z,z_0]} f(w)dw = 0$$

נסביר אגב לומר:

$$\underbrace{\int_{[z_0,z+\Delta z]} f(w)dw}_{=-\int_{[z+\Delta z,z_0]} ''} - \int_{[z_0,z]} f(w)dw = \int_{[z,z+\Delta z]} f(w)dw$$

לכן, $\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(w)dw$.

כמו כן, $f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} f(z)dw$

(כמו בהוכחת משפט 4).

לכן $\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} [f(w)-f(z)]dw$

כעת נוכיח שכאשר $\Delta z \to 0$, אגף ימין שואף ל-0.

יהי $\epsilon>0$ נתון.

f רציפה ב-z כלפי הנתון ולכן יש $\delta>0$ כך שאם $|w-z|<\delta$ אזי $|f(w)-f(z)|<\epsilon$.

אזי אם $|\Delta z|<\delta$ אזי לכל $w\in[z,z+\Delta z]$ נקבל $|w-z|<\delta$ ולכן $|f(w)-f(z)|<\epsilon$. לכן אם $|\Delta z|<\delta$ נקבל

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} (f(w)-f(z))dw\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}ML = \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon$$

אזי כאשר $\Delta z \to 0$, אגף ימין שואף ל-0 ונקבל

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0$$

כלומר $F'(z)$ קיימת ושווה $f(z)$.

זה מוכיח את הטענה ומכאן את המשפט.

משל

(לגבי הסינגולריות - זה מוכלל במשולש קושי)

משפט 8: כנוסחת קושי בתחום קמור)
יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח וקמור, ותהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב-D. עוד נניח שיש מסילה סגורה ב-D. אזי לכל $z_0\in D\setminus\gamma$,

$$\underbrace{Ind}_{\text{אינדקס}}{}_\gamma(z_0)f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

הוכחה: לכל $z\in D$ נגדיר

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z\neq z_0\\ f'(z_0) & z=z_0\end{cases}$$

$g(z)$ רציפה בכל D ואנליטית ב-$D\setminus\{z_0\}$.
כי f אנליטית

D קמור ולכן נפעיל את משפט 7 לומר

לפי נתון $\gamma\not\ni z_0$ לכן נשתמש בנוסחה הראשונה

$$0=\int_\gamma g(z)dz=\int_\gamma\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

נעביר אגף ונקבל

$$\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_\gamma\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz=f(z_0)\cdot\int_\gamma\frac{1}{z-z_0}dz\underset{\uparrow}{=}f(z_0)\cdot 2\pi i\,Ind_\gamma(z_0)$$

לפי משפט שהוכחנו קודם

לכן $Ind_\gamma(z_0)f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, לכל $z_0\in D\setminus\gamma$.

משל

מקרה פרטי, פשוט ושכיח של משפט 8:
אם γ "מסילת ז'ורדן" כלומר מסילה סגורה שלא חותכת את עצמה
אזי לכל z_0 ב"תוך" γ, $Ind_\gamma(z_0)=1$

לא ז'ורדן 

כאשר γ מכוונת נגד כיוון השעון).
לכן עבור כל z_0 בתוך γ,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

משפט 9: (משפט ליוביל)

פונקציה שלמה וחסומה - קבועה.

הוכחה: הנתון אומר שיש לנו פונק' שלמה $f(z)$, כלומר אנליטית בכל $\mathbb{C}$.
היא גם חסומה, כלומר יש $0<K$ כך שלכל $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\le K$.
צ"ל $f(z)$ קבועה.
לצורך כך ניקח $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ונוכיח $f(z_1)=f(z_2)$.
נבחר R גדול כלפחות $|R|>\max(|z_1|,|z_2|)$.
נסתמך על כך ש-$\mathbb{C}$ תחום וקמור כדי להפעיל את משפט 8

$$f(z_K)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,R)}\frac{f(z)}{z-z_K}dz,\quad K=1,2$$

לכן

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,R)}\left[\frac{f(z)}{z-z_1}-\frac{f(z)}{z-z_2}\right]dz=$$

מכנה משותף

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,R)}\frac{f(z)(z_1-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$$

29/3

לכן $|z-z_k| \ge |z|-|z_k| = R-|z_k|$ (כיוון שכאשר $z \in C(0,R)$ מתקיים $|z|=R$)

כעת

$$|f(z_1)-f(z_2)| \le ML = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{ערך מוחלט של } \frac{1}{2\pi i} \text{ שבא המקדם באינט'}} \underbrace{\frac{K|z_1-z_2|}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}}_{=M} \underbrace{2\pi R}_{=L}$$

(לפי אי שוויון ML מתקיים)

אבל f פונק' שלמה

לכן ניקח R גדול כרצוננו כך f אנליטית בכל $B(0,R)$

נשאיף $R \to \infty$ באי-השוויון הנ"ל להסיק

$$0 \le |f(z_1)-f(z_2)| \le \lim_{R\to\infty} \frac{K|z_1-z_2|}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} R = 0$$

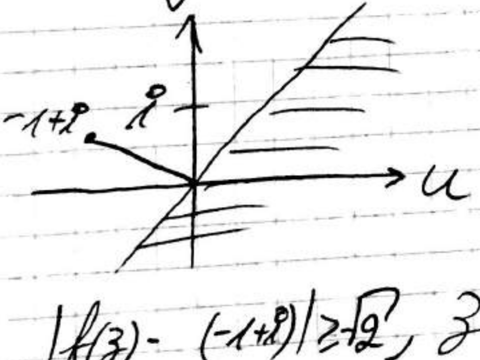
לכן $f(z_1)=f(z_2)$ לכל $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$, ולכן f קבועה מש"ל

תרגיל ממבחן:

נניח $f(z)$ פונק' שלמה, ו-$\mathrm{Re} f \ge \mathrm{Im} f$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

צ"ל f קבועה.

הוכחה:



הטווח של f

לפי הנתון, לכל $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)-(-1+i)| \ge \sqrt{2}$

לכן נגדיר

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-(-1+i)}$$

לכל $z \in \mathbb{C}$, $f(z) \ne -1+i \Leftarrow g(z)$ שלמה.

יתר על כן, לכל $z\in\mathbb{C}$

$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)-(-1+i)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow$ g חסומה.

לפי משפט ליוביל g קבועה $\Leftarrow$ f קבועה.

<u>משפט 10:</u> (המשפט היסודי של האלגברה)

יהי $p(z)$ פולינום מרוכב לא קבוע.

אזי יש ל-p שורש ב-$\mathbb{C}$.

<u>הוכחה:</u>

נרשום $p = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.

נניח ש- $n\ge 1$ (כי p לא קבוע) ו $a_n \neq 0$.

לכן, עבור כל $z\neq 0$ נרשום

$$p(z) = z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right) \equiv z^n q(z)$$

אם $z\to\infty$ אזי $|z^n|\to\infty$ וגם $q(z)\to a_n\neq 0$.

לכן $\lim_{z\to\infty} |p(z)| = \infty$.

כעת, נניח בשלילה של-$p(z)$ אין שורש מרוכב.

נגדיר $h(z) = \frac{1}{p(z)}$.

$p(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$ ולכן $h(z)$ פונק' שלמה.

כמו כן, $\lim_{z\to\infty}|p(z)|=\infty \Rightarrow \lim_{z\to\infty} h(z) = 0$

<u>טענה:</u> $h(z)$ חסומה ב-$\mathbb{C}$.

<u>הוכחת הטענה:</u> כיוון ש- $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ יש $R>0$

כך שאם $|z|>R \Leftarrow |h(z)|<1$.

בכדור $\overline{B(0,R)}$, h רציפה ולפי ויירשטראס
ו-$|h(z)|$ חסום, נניח $M \ge |h(z)|$ לכל $|z| \le R$.
לכן לכל $z \in \mathbb{C}$, $|h(z)| \le \max(M,1)$.
לכן הוכחנו את הטענה.
בסיכום, $h(z)$ שלמה וחסומה, לכן לפי משפט ליוביל
$h(z)$ קבועה.
מכיוון ש- $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$, בהכרח $h(z) = 0$,
ז"א, לכל $z \in \mathbb{C}$ נקבל $h(z) = \frac{1}{P(z)} = 0$.
זה לא ייתכן!
הסתירה מוכיחה את המשפט. מש"ל

נעיר שממשפט זה נובע כי אם $P(z)$ פולינום ממעלה
$n \ge 1$, אזי יש לו שורש $z_1 \in \mathbb{C}$. כידוע מאלגברה
זה אומר שק"ק פירוק - $P(z) = (z - z_1) q(z)$
כאשר q פולינום ממעלה $n-1$.
אם $n-1>0$ אזי משפט זה נותן שורש z_2 ל-$q(z)$.
אפשר להמשיך כך ולקבל פירוק מושלם
$P(z) = c(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$.
נוכל להתייחס אליו כפולינום מרוכב ולפרק כנ"ל
$P(x) = c(x-z_1)\dots(x-z_n)$

אם איזה z_k ממשי מה טוב!
אם z_k מרוכב, בשיעור הראשון ראינו שגם
$\bar{z}_k$ צמוד ל-P. לכן
$(x - z_k)(x - \bar{z}_k) = x^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|$
פולינום ממשי!
לכן ניתן לפרק את P למכפלת גורמים ליניאריים וריבועיים ממשיים!

במשפט היסודי של האלגברה השתמשנו באינפי 2
בנושא של שברים חלקיים

בשיעור הבא של פונק' מרוכבות... PREVIEW

נוסחת קושי:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

שיפור:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

השערה:

$$f'(z)=\frac{d}{dz}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

וכך לכל n

514

מקרה שכיח וידידותי למשפט קושי:

אם γ מסילת ז'ורדן מכוונת נגד כיוון השעון
אזי לכל z_0 "בתוך γ", $Ind_\gamma(z_0)=1$ ולכל z_0
מחוץ ל-γ $Ind_\gamma(z_0)=0$

עבור מסילה כזאת התוצאה היא - לכל z_0
בתוך γ

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

סכום רימן לאינט' כזה- $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(z_k)}{z_k-z_0}(z_k-z_{k-1})$

שיפוץ קטן לנוסחה האחרונה:

לכל z בתוך γ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

השערה נועזת:

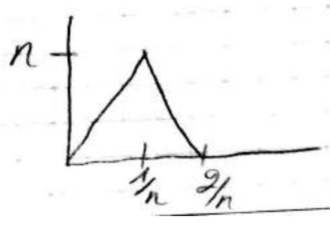
$$f'(z)=\frac{d}{dz}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\partial}{\partial z}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

הוכחה פיזיקלית:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\left[\oint \frac{f(w)}{w-z-\Delta z}-\frac{f(w)}{w-z}\,dw\right]=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\underbrace{\frac{1}{2\pi i\,\Delta z}\oint f(w)\frac{\Delta z}{(w-z-\Delta z)(w-z)}}_{\text{חשוב!}}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$



$\Leftarrow$ "יתכן $f_n\to f$ אבל $\int f_n \not\to \int f$!

כדי לבסס גזירה זו באופן מדויק ולהראות שניתן לגזור ∞ פעמים נצטרך למה:

<u>למה:</u> נניח ש- $g(w)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לאורך הקטע $[z, z+\Delta z]$.
עוד נניח ש$g''(w)$ (נגזרת שניה) רציפה בקטע.

נסמן - $M = \max\limits_{w\in[z,z+\Delta z]} |g''(w)|$

אזי $\left|\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} - g'(z)\right| \le M|\Delta z|$.

<u>הוכחה:</u> לפי ניוטון-לייבניץ

$$g(z+\Delta z)-g(z) = \int_z^{z+\Delta z} g'(w)\,dw$$

לכן

$$\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} g'(w)\,dw$$

אבל גם

$$g'(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} g'(z)\,dw$$

לכן

$$\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} - g'(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} (g'(w)-g'(z))\,dw$$

לכל $w\in[z,z+\Delta z]$

$$g'(w)-g'(z) = \int_{[z,w]} g''(t)\,dt$$

כאן $|z-w| \le |\Delta z|$, ולכן $|g'(w)-g'(z)| \le M|\Delta z|$

ונקבל

$$\left|\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} - g'(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]} (g'(w)-g'(z))\,dw\right| \le \left|\frac{1}{\Delta z}\right| M L =$$

$$= \frac{1}{\cancel{|\Delta z|}} \underline{\overbrace{M|\Delta z|}^{M}}\, \overbrace{\cancel{|\Delta z|}}^{1}$$

משל

משפט 11: יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח וקמור.
נניח ש-γ היא מסילת ז'ורדן ב-D שמקיפה
תחום D' כך ש-$D'\subset\overline{D'}\subset D$.
עוד נניח ש-$f(z)$ אנליטית ב-D.
אזי לכל $z\in D'$ ולכל $n=0,1,2,\ldots$,

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

(בפרט - f גזירה ∞ פעמים ב-D')
מוגדר $f(z)=f^{(0)}(z)$.

הוכחה: ב-$n=0$ זוהי נוסחת קושי.
נניח שהטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$, ונוכיח עבור $n+1$.
תהי $z\in D'$.
D' פתוח, לכן יש $r>0$ כך ש-$\overline{B(z,r)}\subset D'$.
נבחר Δz כך ש-$|\Delta z|<\frac{r}{2}$.
לפי הגדרה,

$$f^{(n+1)}(z)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f^{(n)}(z+\Delta z)-f^{(n)}(z)}{\Delta z}$$

לפי הנחת האינדוקציה,

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{(w-z-\Delta z)^{n+1}}-\frac{1}{(w-z)^{n+1}}\right]dw$$

רוצים להוכיח שגבול זה שווה ל-$f^{(n+1)}(z)$.
נרשום את ההפרש -

$$\frac{f^{(n)}(z+\Delta z)-f^{(n)}(z)}{\Delta z}-\frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}dw=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)\left\{\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{(w-z-\Delta z)^{n+1}}-\frac{1}{(w-z)^{n+1}}\right]-\frac{n+1}{(w-z)^{n+2}}\right\}dw$$

כעת נקבע $w\in\gamma$ ונגדיר

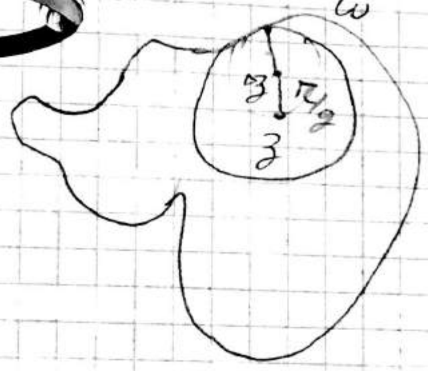
$$g_w(z)=\frac{1}{(w-z)^{n+1}}$$

הביטוי בסוגריים {} הוא

$$\frac{g_w(z+\Delta z)-g_w(z)}{\Delta z}-g_w'(z)$$

לפי הגדרת g, $g''_w(z)=\frac{(n+1)(n+2)}{(w-z)^{n+3}}$

לפי בחירת Δz, $w\in\gamma$ תמיד יהיה במרחק של $r/2$ לפחות מ-Δz.



⇐ אם $t\in[z,z+\Delta z]$, $|w-t|>r/2$.

לכן

$$|g''_w(t)|\le\frac{(n+1)(n+2)}{(r/2)^{n+3}}\equiv K$$

לפי הלמה

$$\left|\frac{g_w(z+\Delta z)-g_w(z)}{\Delta z}-g_w'(z)\right|\le K|\Delta z|$$

<u>נחזור אחורה:</u>

$$\left|\frac{f^{(n)}(z+\Delta z)-f^{(n)}(z)}{\Delta z}-f^{(n+1)}(z)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma f(w)\left[\frac{g_w(z+\Delta z)-g_w(z)}{\Delta z}-g_w'(z)\right]dw\right|$$

$$\le\underbrace{\frac{n!}{2\pi}\max_{w\in\gamma}|f(w)|\,K}_{\text{מספר}}\overset{\to 0}{|\Delta z|}\underbrace{|\gamma|}_{\text{מספר}}\xrightarrow{\Delta z\to 0}0$$

⇐ $f^{(n)}(z)$ גזירה ונגזרתה שווה $f^{(n+1)}(z)$ כדרוש.

מש"ל

<u>מסקנה</u>: יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום פתוח כלשהו,
ותהי $f(z)$ אנליטית ב-D.
אזי f גזירה ∞ פעמים ב-D,
וכל נגזרת $f^{(n)}(z)$ אנליטית ב-D.

<u>הוכחה</u>: ניקח $z \in D$ כלשהו.
D פתוח, ולכן יש $r>0$ כך ש $B(z,r) \subset D$.
$B(z,r)$ תחום קמור ו-f אנליטית בתחום זה.
לכן עבור $t \in B(z, \frac{r}{2})$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(t)$ קיימת
ונתונה ע"י
$$f^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z, \frac{r}{2})} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$
גם $z \in B(z, \frac{r}{2})$ ולכן f גזירה ∞ פעמים ב-z.
עבדנו כך ש $f^{(n)}(z)$ גזירה לכל n מוכיחה שהיא
אנליטית. מש"ל

<u>שאלה</u>: נובע ממשפט 11 ש-
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(w)}{w-z} dw$$
אחרי שיודעים ש-$f''(z)$ קיימת אפשר להוכיח
את השוויון עם אינט' בחלקים.

הערה: האנלוגיה של משפט 11 לפונק' ממשיות לא נכון.

למשל, $f(x)=x^{4/3}$ מוגדרת וגזירה בכל $\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ $f''(x)=\frac{4}{9}x^{-2/3}$ לא קיימת ב-0.

שאלה: נגדיר פונק' מרוכבת $f(z)=z^{4/3}$

לכאורה זאת סתירה למשפט 11

כי היא גזירה פעם אחת ולא פעמיים.

גם ענף

is not enough בה!

$\Leftarrow$ אין סתירה למשפט כי לא ניתן להגדיר ענף אנליטי של $z^{4/3}$ בסביבה שלמה של 0.

משפט 12: (משפט מוררה)

יהי D פתוח, ונניח $f(z)$ רציפה ב-D.

ולכל מסילה סגורה ב-D, $\oint_\gamma f(z)\,dz=0$.

אזי f אנליטית ב-D.

הוכחה: במשפט 7 הוכחנו שבתנאי משפט 12, יש ל-f פונק' קדומה $g(z)$ ב-D.

ז"א g אנליטית ב-D ו $f(z)=g'(z)$ ב-D.

במסקנה למשפט 11 למדנו שהנגזרת של פונק' אנליטית אף היא אנליטית. לכן f אנליטית ב-D.

מש"ל

משפט 13: (משפט הערך הממוצע)

נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בעיגול סגור $\overline{B(z_0,r)}$.

אזי

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta .$$

כ"א ערך הפונק' במרכז העיגול שווה לממוצע ערכיה על שפת העיגול.

הוכחה: נתון ש- f אנליטית ב- $\overline{B(z_0,r)}$

$\Leftarrow$ היא אנליטית בסביבת כל נק' ב- $\overline{B(z_0,r)}$,

ולא קשה להראות (= תרגול) שיש $\varepsilon>0$

כך ש- f אנליטית ב- $B(z_0, r+\varepsilon)$. זה תחום קמור

ולכן לפי משפט 8,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0,r)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

כזכור, $C(z_0,r)$ מתואר ע"י

$$z=z_0+re^{i\theta}$$
$$0\leq\theta\leq 2\pi$$

לכן $dz=ire^{i\theta}d\theta$

$$\Rightarrow f(z_0)=\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{\cancel{re^{i\theta}}}\cancel{ire^{i\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

מש"ל

הערה: מהמשפט נובע $Re(f(z_0)) = Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re f(z_0+re^{i\theta})d\theta$

שהוא אינט' מסוג ראשון

באופן דומה

$$Im(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Im f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

כזכור $Re f$ ו- $Im f$ פונק' הרמוניות.

בעתיד אפשר להוכיח שכל פונק' הרמונית מקיימת את משפט הערך הממוצע.

גם אפשר להוכיח שפונק' רציפה שמקיימת את משפט זה על כל מעגל ב-D היא הרמונית ב-D.

משפט 14: כעקרון המקס' במקרה פרטי)

נניח ש-$f(z)$ מוגדרת ואנליטית בעיגול הסגור $\overline{B(z_0,r)}$, ונניח ש-$|f(z)|$ מקבל את המקס' שלו ב-$\overline{B(z_0,r)}$ במרכז z_0.

אזי $f(z)$ קבועה ב $\overline{B(z_0,r)}$.

הוכחה: נרשום $f(z_0) = Me^{i\theta}$.

נגדיר $g(z) = e^{-i\theta}f(z)$.

$\Leftarrow$ בכל $\overline{B(z_0,r)}$, $|g(z)| = |f(z)|$ וגם

$g(z_0) = e^{-i\theta}Me^{i\theta} = M = \max|f(z)|$

לפי משפט 13,

$$M = g(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{it})dt$$

בפרט,

$$M = Re\, M = Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\, g(z_0+re^{it})dt$$

5/4

כמו כן, $M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,dt = M$

לכן $0 = M - M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [M - \mathrm{Re}\, g(z_0 + re^{it})]\,dt$

לפי הנתון, לכל t,

$M \geq |g(z_0+re^{it})| \geq \mathrm{Re}\, g(z_0+re^{it})$

כ"א $M - \mathrm{Re}\, g(z_0+re^{it}) \geq 0$

בגלל הפונק' רציפה ואי-שלילית שראינו שהאינט' שלה שווה 0.

לכן בהכרח $M - \mathrm{Re}\, g(z_0 + re^{it}) = 0$ לכל $0 \leq t \leq 2\pi$.

מכיוון ש- $M \geq |g(z_0+re^{it})|$ נובע -

$M = \mathrm{Re}\, g(z_0+re^{it}) \underset{(2)}{=} g(z_0+re^{it})$ (לכל $0 \leq t \leq 2\pi$)

(לפי א"ש של ערך מוחלט)

במילים אחרות, $g(z)$ קבועה בשפה (z_0, r).

אבל לפי הגדרת g, $g(z) = e^{-i\theta} f(z)$, בשפה

$M = g(z) = e^{-i\theta} f(z) \Rightarrow f(z) = Me^{i\theta} = f(z_0)$

$\Leftarrow$ עבור $0 < r \leq R$ אותו נימוק מראה שאם $0 \leq t \leq 2\pi$

$f(z_0 + r e^{it}) = Me^{i\theta} = f(z_0)$

כך הוכחנו ש- f קבועה בכל העיגול $\overline{B(z_0, R)}$

מש"ל

משפט 15: (עקרון המקס' הכללי)

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר. תהי $f(z)$ אנליטית ב-D.

(א) אם $|f(z)|$ מקבל מקס' (מוחלט) באיזו נק' $z_0\in D$, אזי $f(z)$ קבועה בכל D.

(ב) אם D חסום ואם $f(z)$ אנליטית ב-D ורציפה ב-$\bar{D}$, אזי $|f(z)|$ מקבל את המקס' שלו ב-$\bar{D}$ על השפה ∂D, ואם $f(z)$ לא קבועה ב-$\bar{D}$, אזי $|f(z)|$ מקבל את המקס' שלו רק בשפה ∂D.

הוכחה:

(א) נגדיר $Q_1=\{z\in D \mid f(z)\neq f(z_0)\}$, $Q_2=\{z\in D \mid f(z)=f(z_0)\}$

ברור ש $D=Q_1\cup Q_2$, $Q_1\cap Q_2=\emptyset$

כעת Q_1 פתוחה כי היא המקור של קב' פתוחה ($\mathbb{C}\setminus\{f(z_0)\}$) ע"י הפונק' הרציפה $f(z)$.

גם Q_2 פתוחה לפי משפט 14.

בפרט, אם $z\in Q_2$, נבחר $r>0$ כך ש $\overline{B(z,r)}\subset D$.

כיוון ש $z\in Q_2$, $|f(z)|$ מקבל את המקס' שלו ב-$\overline{B(z,r)}$ בדיוק במרכז z.

לפי משפט 14, $f(z)=f(w)$ עבור כל $w\in B(z,r)$.

לכן כל $w\in B(z,r)$ נק' מקס' ל-$|f|$ ושייכת ל-Q_2.

המסר - לכל $z\in Q_2$ יש סביבה שלמה $B(z,r)$ שמוכלת ב-Q_2. לכן Q_2 פתוחה.

$\Rightarrow$ $Q_1\cap Q_2=\emptyset$, $Q_1\cup Q_2=D$ ושתיהן פתוחות!

לפי כך ש-D קשירה, אחת ה-Q ריקה והשנייה היא כל D. אבל פשוט ש $z_0\in Q_2$, ולכן היא לא ריקה

$\Rightarrow$ $Q_2=D$ ולכן $z\in D$, $z\in Q_2$ ולכן $f(z)=f(z_0)$ $\Rightarrow$ f קבועה!

הכרחה:

ב) לפי הנתונים $\bar{D}$ קומפקטית, $|f(z)|$ רצי׳ ב-$\bar{D}$

$\Leftarrow$ לפי ויירשטראס $\exists$, $|f(z)|$ מקבלת מקס׳ ב $z_0 \in \bar{D}$.

אם $z_0 \in D$ (כפנימית) חלק א אומר ש-$|f(z)|$ קבועה ב-D.
הרציפות נותנת שהיא קבועה ב$\bar{D}$, והמקס׳ מתקבל
גם בשפה.

אם $|f(z)|$ לא קבועה, אזי המקס׳ של $|f(z)|$ מתקבל רק
בשפה ∂D, כדרוש.

מש"ל

טורים, טורי פונק' וטורי טיילור

הגדרה: נניח ש- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ טור של מס' מרוכבים.

לכל N נגדיר סכום חלקי $S_N=\sum_{n=1}^{N} z_n$.

$\Leftarrow$ $\{S_N\}$ סדרה מרוכבת!

אם קיים $S=\lim_{N\to\infty} S_N$, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

מתכנס וסכומו S.

אם $\lim_{N\to\infty} S_N$ אינו קיים, נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתבדר!

משפט 1: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} z_n=\sum_{n=1}^{\infty} x_n+iy_n$ טור מרוכב.

א) הטור $\sum z_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ מתכנסים (טורים ממשיים)

ואם כן $\sum_{n=1}^{\infty} z_n=\sum_{n=1}^{\infty} x_n+i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

ב) כל טור שמתכנס בהחלט, בהחלט מתכנס!

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס

הוכחה:

א) מתחת לרמה שלנו!

ב) לכל n, $0\le |x_n|\le |z_n|$

ואם נתון ש $\sum |z_n|$ מתכנס אזי לפי מבחן ההשוואה

$\sum |x_n|$ מתכנס, ולפי משפט מאינפי 1 גם $\sum x_n$ מתכנס.

בדומה $\sum y_n$ מתכנס

$\Downarrow$

$\sum z_n$ מתכנס מא'.

משל

דוגמה חשובה: (טור הנדסי)

ניקח $z\in\mathbb{C}$ קבוע ונבנה טור הנדסי מנורמל

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3+\dots$$

כאן לא מועיל לקחת חלק ממשי ומדומה

הפיתוח של $z^n=(x+iy)^n$ ניוטוני!

$\Leftarrow$ ניקח סכום חלקי $S_N=1+z+z^2+z^3\dots+z^N$

$$\Rightarrow zS_N=z+z^2+z^3\dots z^{N+1}$$

$$\Rightarrow (1-z)S_N = 1-z^{(N+1)}$$

$$\Rightarrow S_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} z^{N+1} = \begin{cases} 0 & |z|<1 \\ 1 & z=1 \\ \text{לא קיים} & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z|<1 \\ \text{לא קיים} & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z|<1 \\ \text{מתבדר} & \text{אחרת} \end{cases}$$

19/4

משפט 2:

א) אם $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אזי $\lim_{n\to\infty} z_n=0$

ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ מתכנסים ו $c\in\mathbb{C}$ קבוע אזי

גם $\sum_{n=1}^{\infty} z_n+cw_n$ מתכנס וסכומו $\sum_{n=1}^{\infty} z_n + c\sum_{n=1}^{\infty} w_n$

סדרות פונקציות

נניח שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש פונק' $f_n: D\to\mathbb{C}$ מוגדרת בתחום משותף D.

לכל $z\in D$, $\{f_n(z)\}$ היא סדרה של מס' מרוכבים.

מגדירים את תחום ההתכנסות של הסדרה $\{f_n\}$ ע"י

$\{$ק"ים $\lim_{n\to\infty} f_n(z) \mid z\in D\} = B\subseteq D$

על B מוגדרת פונק' גבולית $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$

עד כאן "התכנסות נקודתית" של סדרת פונק'.

הגדרה: יהיו $\{f_n\}$ ו- f פונק' מוגדרות בתחום $D\subseteq\mathbb{C}$.

נאמר ש- $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ במ"ש ב-D

(או $f_n\to f$ במ"ש ב-D)

אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$ אזי $|f_n(z)-f(z)|<\epsilon$

לכל $z\in D$.

שקול: $f_n\to f$ במ"ש $\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D}|f_n(z)-f(z)|=0$

משפט 3: (השלכות של התכנסות במ"ש)

א) אם כל f_n רציפות ב-D ו $f_n\to f$ במ"ש ב-D,

אזי גם f רציפה ב-D.

ב) אם כל f_n רציפות למקוטעין במסילה γ ואם $f_n\to f$ במ"ש

ב-γ, אזי $\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz$

(ג) אם כל f_n אנליטיות בתחום פתוח $O\subset\mathbb{C}$ ואם $f_n \to f$ נקודתית ב-O ו-$\{f_n'\}$ מתכנסת במ"ש לפונק' $g: O \to \mathbb{C}$, אזי f אנליטית ב-O ו-$g=f'$ ב-O.

ז"א בתנאים אלה

$$\frac{d}{dz}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dz} f_n(z)$$

ההוכחה כמו באינפי 2!

טורי פונקציות

הגדרה: נניח שלכל n יש פונק' $U_n: O^{\subset\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

נבנה טור פונק' $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$

לטור זה נתאים סכומים חלקיים $S_N(z)=\sum_{n=1}^{N} U_n(z)$

אזי $\{S_N(z)\}$ מהווים סדרת פונק' ב-O.

לפי הגדרה תחום ההתכנסות של הטור הוא תחום ההתכנסות של סדרת הפונק' $\{S_N(z)\}$ ובתחום זה מוגדרת פונק' גבולית $f(z)=\lim_{N\to\infty} S_N(z)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$

עד כאן התכנסות נקודתית.

נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ מתכנס ל-$f(z)$ במ"ש ב-O אם $S_N \to f$ במ"ש ב-O.

משפט:

(א) אם כל $U_n(z)$ רציפות בתחום O ו-$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ מתכנס ל-$f(z)$ במ"ש ב-O, אזי f רציפה ב-O.

(ב) אם כל $U_n(z)$ רציפות למקוטעין במסילה γ ואם $f=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ עם התכנסות במ"ש ב-γ אזי $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma U_n(z)dz$.

ג) נניח ש-$D \subset \mathbb{C}$ תחום פתוח וכל $u_n(z)$ אנליטיות ב-D.
עוד נניח ש-$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס נקודתית ל-$f(z)$ ב-D,
ו-$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z)$ מתכנס במ"ש ל-$g(z)$ ב-D.
אזי $f(z)$ אנליטית ב-D ו-$f'=g$,
ז"א מותר לגזור אבר אבר

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}u_n(z)$$

משפט 5: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) + i v_n(x,y)$ מוגדר בתחום $D \subset \mathbb{C}$. אזי

א) $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב-D $\iff$ $\sum u_n$ ו-$\sum v_n$ מתכנסים במ"ש ב-D ואם כן $\sum f_n = \sum u_n + i\sum v_n$

ב) (מבחן ה-M של ויירשטראס)
נניח שלכל n יש חסם $|f_n(z)| \le M_n$ לכל $z\in D$.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס אזי $\sum f_n$ מתכנס בהחלט עבור כל $z\in D$ ובמ"ש ב-D.

טורי חזקות

טור מהסוג $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$
כאשר z_0 ו-$\{a_n\}$ מספרים מרוכבים קבועים.

משפט 6: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. נגדיר $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. אזי:

א) אם $z_1\in\mathbb{C}$ מקיים $|z_1-z_0|<R$, הטור מתכנס בהחלט בנק' $z=z_1$.

ב) אם $R<|z_1-z_0|$, הטור מתבדר ב-$z=z_1$

ג) אם $0<r<R$, הטור מתכנס במ"ש בעיגול $B(z_0,r)$.

ד) אם $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ קיים במובן הרחב אזי גבול זה שווה ל-R.

R נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור!

הוכחה של א:

נתון $|z_1-z_0|<R$ ר״ל התכנסות בהחלט צ״ל

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z_1-z_0|^n$ מתכנס.

חזרנו לממשיים - נפעיל את מבחן השורש:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n||z_1-z_0|^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,|z_1-z_0|=\frac{1}{R}\overbrace{|z_1-z_0|}^{<R}<1$$

$\Leftarrow$ לפי מבחן השורש, $\sum|a_n||z_1-z_0|^n$ מתכנס.

ב) ממש דומה לא׳

ג) אם $z\in\overline{B_r(z_0)}$ אזי $|z-z_0|\le r$. לכן בתחום זה

$|a_n||(z-z_0)^n|\le|a_n|r^n=M_n$. רוצים להפעיל את מבחן ה-M של ויירשטראס.

בשביל זה צריך $\sum M_n$ מתכנס.

אבל $\sum_{n=0}^{\infty}M_n=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$. נפעיל את מבחן השורש:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|r^n}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\,r=\frac{1}{R}r<1$$

$\Leftarrow$ ע״פ ויירשטראס, הטור מתכנס במ״ש ב $\overline{B(z_0,r)}$

מש״ל

משפט 7: נניח שלטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ יש רדיוס התכנסות $R>0$. לכן מוגדרת פונק' גבולית $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ לכל $z\in B(z_0,R)$. אזי:

א) $f(z)$ אנליטית ב-$B(z_0,R)$, ומתקיים $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$

ב) ב-$B(z_0,R)$ יש ל-f פונק' קדומה

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z+z_0)^{n+1}}{n+1}$$

רדיוס התכנסות של $f'(z)$, $F(z)$ הוא R.

הוכחה:

א) תחילה נוכיח שלטור הנגזר $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ יש רדיוס התכנסות R.

ובכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n}$ מתכנס (כי כאילו כפלנו בקבוע $(z-z_0)$ את הטור)

לטור האחרון יש רדיוס התכנסות

$$\rho=\frac{1}{\lim \sqrt[n]{n|a_n|}}=\frac{1}{\lim \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\frac{1}{R}}=R$$

לכן אם $0<r<R$ הטור הנגזר $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ מתכנס במ"ש ב-$B(z_0,r)$.

כיוון שהטור הנגזר מתכנס במ"ש ב-$B(z_0,r)$ אזי לפי משפט 4 נגזור איבר איבר את הטור המקורי:

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

$\Leftarrow$ $\frac{d}{dz}f(z)$ קיים ושווה $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$

בפרט, $f(z)$ אנליטית ב-$B(z_0,r)$.

אבל רדיוס f אנליטית ב-$B(z_0,R)$!

ובכן אם $z_1 \in B(z_0,R)$ אזי $|z_1-z_0|<R$ ולכן יש r כך

ש $R>r>|z_1-z_0|$. לפי הנימוק הקודם, f אנליטית

ב-z_1 ומתקיים $f'(z_1)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1-z_0)^{n-1}$

ההוכחה של סעיף ב' דומה.

<u>מסקנות:</u>

א) בנתונים של המשפט, לכל $k\in\mathbb{N}$

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(z-z_0)^{n-k}$$

בתחום $B(z_0,R)$. רדיוס ההתכנסות עבור $f^{(k)}(z)$ הוא R.

ב) לכל $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}(z_0)=k!a_k$ כלומר $a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

והטור הוא טור טיילור של $f(z)$ ב-z_0.

ג) משפט היחידות לטורי חזקות

אם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ בסביבת z_0, אזי

$a_n=b_n$ לכל n והטורים זהים!

<u>הוכחה</u>

א) אינדוקציה

ב) לפי א,

$$f^{(k)}(z)=k!a_k+(k+1)!a_{k+1}(z-z_0)\dots \Rightarrow f^{(k)}(z_0)=k!a_k+0\dots=k!a_k$$

ג) נקרא לפונק' הגבולית $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$

לפי ב, עבור כל n $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=b_n$ והטורים זהים!

טורי חזקות

<u>הגדרה:</u> אלו טורים מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ כך ש- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$,
כאשר z_0 ו-$\{a_n\}$ הם מספרים מרוכבים קבועים.

<u>משפט 6:</u> יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות. נגדיר - $R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$, אזי -

(א) אם $z_1\in\mathbb{C}$ מקיים $R>|z_1-z_0|$, הטור מתכנס בהחלט עבור $z=z_1$.

(ב) אם $R<|z_1-z_0|$ הטור מתבדר עבור $z=z_1$.

(ג) אם $0<r<R$ הטור מתכנס במ"ש בסגור $\overline{B(z_0,r)}$.

(ד) אם $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ קיים במובן הרחב אזי גבול זה שווה ל-R.

← R נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור.

<u>הוכחה:</u> (א) נתון ש- $|z_1-z_0|<R$. רוצים להוכיח התכנסות בהחלט:
צ"ל ש- $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n$ מתכנס. נפעיל את מבחן השורש:

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n||z_1-z_0|^n}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\,|z_1-z_0|=\frac{1}{R}|z_1-z_0|<1$$

כי נתון ש- $(z_1-z_0)<R$, וכיוון ש- $\overline{\lim}<1$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z_1-z_0|^n$ מתכנס.

(ב) ממש דומה ל-א'.

(ג) אם $z\in\overline{B(z_0,r)}$ אז $|z-z_0|\le r$ ולכן בתחום זה $|a_n(z-z_0)^n|\le|a_n|r^n=M_n$

רוצים להפעיל את מבחן ה-M של ויירשטראס.

לשם כך צריכים ש- $\sum_{n=0}^{\infty}M_n$ יתכנס. אבל $\sum_{n=0}^{\infty}M_n=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ -

נפעיל את מבחן השורש - $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|r^n}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\;r<\frac{1}{R}r<1$.

לכן, עפ"י מבחן ויירשטראס הטור מתכנס במ"ש ב- $\overline{B(z_0,r)}$. מש"ל

← משפט 7: נניח שלטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ יש רדיוס התכנסות $R>0$.

לכן, מוגדרת פונק' בעזרת $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ לכל $z\in B(z_0,R)$, אז-

(א) $f(z)$ אנליטית ב- $B(z_0,r)$ ומתקיים שם - $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$

(ב) ב- $B(z_0,R)$ קיימת ל-f פונק' קדומה - $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$

← רדיוס ההתכנסות לטורים עבור $f'(z)$ ו- $F(z)$ הוא R.

<u>הוכחה</u>: (א) תחילה נוכיח שלטור הנגזר $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ יש אותו רדיוס התכנסות R.

ואכן, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ מתכנס $\iff$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n}$ מתכנס

ולטור האחרון יש רדיוס התכנסות

$$S=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{n|a_n|}}=\frac{1}{\lim\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\frac{1}{R}}=R$$

לכן, אם $0<r<R$, הטור הנגזר $\sum n a_n(z-z_0)^{n-1}$ מתכנס במ"ש ב-$B(z_0,r)$.

כיוון שהטור הנגזר מתכנס במ"ש ב- $B(z_0,r)$, ממשפט 4 מותר לגזור איבר-איבר

אז - $\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$

כלומר, $\frac{d}{dz}f(z)$ קיים ושווה לטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ ומכאן f אנליטית ב-$B(z_0,r)$.

אבל, רצינו להוכיח ש-f אנליטית ב-$B(z_0,r)$. ואכן, אם $z_1\in B(z_0,r)$,

אז- $|z_1-z_0|<R$ ונוכל לבחור r כך ש- $|z-z_0|<r<R$.

לפי התנאי הקודם, f אנליטית בנק' z_1 ומתקיים: $f'(z_1)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z_1-z_0)^{n-1}$

הוכחה של (ב) דומה.

<u>מסקנה</u>: (א) בתנאים של המשפט, לכל $k\in N$: $f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(z-z_0)^{n-k}$ בתחום $B(z_0,R)$,

ורדיוס ההתכנסות לטור עבור $f^{(k)}(z)$ הוא בדיוק R.

(ב) לכל $k\in N$, $f^{(k)}(z_0)=k!a_k$, כלו' - $a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ והטור הוא טור טיילור של f ב- z_0.

(ג) משפט היחידות לטורי חזקות

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ בסביבה של z_0 אז לכל n $a_n=b_n$ והטורים זהים.

<u>הוכחה</u>: (א) אינדוקציה.

(ב) לפי א' $f^{(k)}(z)=k!a_k+(k+1)!a_{k+1}(z-z_0)+\frac{(k+2)!}{2}a_{k+2}(z-z_0)^2+\dots$, וכאשר $z=z_0$: $f^{(k)}(z_0)=k!\cdot a_k$

(ג) נגדיר לאותה פונק' $f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n=\sum b_n(z-z_0)^n$

לפי ב', לכל n - $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=b_n$ והם זהים.

__הקדמה למשפט 8__ - תזכורת מאינפי 2

הגדרנו $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ אפשר להוכיח ש-f גזירה ∞ פעמים באפס, ולכל n, $f^{(n)}(0)=0$.

לכן טור מקלורן של f הוא- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}0=0$. הטור מתכנס ל-$f$ אך ורק ב-0.

משפט 8 יאמר שזה לא קורה לפונ' אנליטיות בעיגול, הן תמיד שוות לטור טיילור שלהן סביב מרכז העיגול.

← __משפט 8:__ נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בעיגול סגור $B(z_0,r)$.

אז לכל $z\in B(z_0,r)$ מתקיים - $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ ($\Leftarrow$ f שווה לטור טיילור שלה).

__הוכחה:__ לפי נוסחת קושי, אם $z\in B(z_0,r)$ אז- $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$

נרשום - $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$

כעת, $z\in B(z_0,r)$, לכן $|z-z_0|<r$. w מוגבל ב- $C(z_0,r)$ לכן $|w-z_0|=r$.

אז- $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$ לכן אפשר לפתח לטור הנדסי- $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$

נחזור למעלה - $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0,r)}\sum_{n=0}^{\infty}f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0,r)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,dw$

אך זה שווה- $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)(z-z_0)^n$. לפי נוסחת קושי לנגזרת,

קיבלנו כנדרש- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

__הערה:__ יש צעד אחד בהוכחה של משפט 8 שדורש הצדקה:

אמרנו ש- $\oint\sum_{n=0}^{\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\oint$.

כדי להצדיק שזה נכון נראה שלכל $z\in B(z_0,r)$ קבוע, הטור $\sum f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ מתכנס במ"ש ביחס ל-$w\in C(z_0,r)$.

__אכן__ - $f(w)$ רציפה ב-$C(z_0,r)$ לכן יש חסם $|f(w)|\le k$ חסום שם,

כמו שהסברנו ש- $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|=\rho<1$ לכל $w\in C(z_0,r)$.

לכן כאשר $w\in C(z_0,r)$: $\left|f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right|\le k\rho^n/r=M_n$

כיוון ש- $0<\rho<1$, $\sum M_n=\sum\frac{k\rho^n}{r}$ מתכנס, לכן יש התכנסות במ"ש לפי מבחן ויירשטראס.

__מסקנה:__ אם נתון רק ש-f אנליטית ב-$B(z_0,r)$

מסקנה: אם נתון רק ש-f אנליטית ב-$B(z_0,r)$ פתוח,
אזי מתקיים שלכל $z\in B(z_0,r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

הוכחה: ניקח $z\in B(z_0,r)$ כלשהו. אז $|z-z_0|=\rho<r$. נבחר s כך ש- $\rho<s<r$,
אז f אנליטית ב-$\overline{B(z_0,s)}$.
לפי משפט 8, הטענה על טור טיילור של f נכון ב-$B(z_0,s)$ שמכיל את z.
הדבר אפשרי לכל $z\in B(z_0,r)$ וסיימנו!

משפט 9: תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבת הנק' z_0.
נביט בטור טיילור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.
אז רדיוס ההתכנסות של הטור הוא המס' המקסימלי s כך שאפשר להרחיב את f לפונק' אנליטית ב-$B(z_0,s)$.

דוגמא: נסתכל את $f(z)=\frac{1}{z}$ ונביט בטור טיילור סביב $2+i$. הנק' הסינגולרית היחידה היא $z_0=0$,
לכן רדיוס ההתכנסות של הטור יהיה $\sqrt{5}$.
לעומת זאת, נסתכל על $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ סביב $2+i$. הנק' הסינגולריות הן $0,1$,
לכן הנק' הסינגולרית הקרובה ביותר היא 1 אז רדיוס ההתכנסות הוא $\sqrt{2}$.

הוכחה: נסמן את רדיוס ההתכנסות של הטור להיות R. נרצה להראות $s=R$.
כעת לפי הגדרת s ניתן להרחיב את f באופן אנליטי ל-$B(z_0,s)$.
לפי משפט 8, הטור שלנו מתכנס ב-$B(z_0,s)$. לכן $R\geq s$.
מצד שני מהגדרת R הטור שלנו מתכנס ב-$B(z_0,R)$ ולכן ממשפט 7 סכומו אנליטי ב-$B(z_0,R)$.
לכן הטור עצמו מרחיב את f לפונק' אנליטית ב-$B(z_0,R)$ ולכן $s\geq R$.
כעת הוכחנו $s=R$ כנדרש.

תרגיל ממבחן: $\frac{\sin z}{z^2+4}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2-i)^n$. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.
תשובה: אין לחשב את הטור! כי אז נצטרך לכפול את הטור של $\sin z$ ושל $\frac{1}{z^2+4}$.
במקום זאת, הפונק' $f(z)=\frac{\sin z}{z^2+4}$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$ פרט לנק' $\pm 2i$.
הנק' הסינגולרית הקרובה ביותר ל-$2+i$ היא $2i$. המרחק ביניהם הוא $\sqrt{5}=|2i-(2+i)|$
לכן העיגול המקסימלי סביב $2+i$ שבו הפונק' $f(z)$ אנליטית הוא בעל רדיוס $\sqrt{5}$.
לכן רדיוס ההתכנסות הוא $\sqrt{5}$.

תרגיל: נרשום $\text{Log}\, z=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1-i)^n$. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור.

פתרון: לפי הגדרה, $\text{Log}\, z$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$ פרט לקרן השלילית של ציר x.
לכן הנק' הסינגולרית של $\text{Log}\, z$ הקרובה ביותר ל-$z_0=-1+i$ היא -1, שמרחקה 1.
לכן נצפה ש-$R=1$ אבל זה לא נכון!

הסבר- הגדרנו $\text{Log}\, z=\ln|z|+i\text{Arg}\, z$ כאשר $-\pi<\text{Arg}\, z\le\pi$.
יש עוד ענפים ללוג - למשל הגדרנו $\log_1(z)=\ln|z|+i\arg_1 z$ כאשר $0\le\arg_1 z<2\pi$.
בסביבת הנק' $-1+i$, $\text{Log}\, z=\log_1 z$.
$\log_1 z$ סינגולרית בקרן החיובית של ציר x. לכן הנק' הסינגולרית הקרובה ביותר ל-$-1+i$
היא אפס. המרחק שלה ל-$-1+i$ הוא $\sqrt{2}$ וזהו רדיוס ההתכנסות של הטור.
איך ידענו שאין ענף נוסף שהנק' הקרובה ביותר אליו היא יותר רחוקה? כי אז אולי הרדיוס יותר גדול.
זאת אין כי כל ענף של $\log$ לא אנליטי באפס!

הערה: לפונק' $\sin z, \cos z, e^z$ יש אותן הגדרות כמו לפונק' הממשיות $\sin x, \cos x, e^x$,
ולכן פיתוח טיילור (ביחד - פיתוח טיילור סביב אפס) שלהן הוא בדיוק כמו באינפי 2,
לכל $z\in\mathbb{C}$, $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

כמו כן $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, זה טור הנדסי שמתכנס לפונק'.
לפי משפט היחידות, הוא טור טיילור שלה.
גם בממשי, הרי $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ב-$\mathbb{R}$ אין לפונק' $\frac{1}{1+x^2}$ אף נק' סינגולרית
ואעפ"כ שמים לב שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא רק 1 ולא ∞.
הסיבה היא שיש שני "גורמים" שמסתתרים ב-$\pm i$ שהם נק' סינגולריות של $\frac{1}{1+z^2}$,
שמגבילות את ההתכנסות לרדיוס 1.

<u>למה:</u> נניח ש-$f(z)$ מוגדרת ואנליטית בעיגול $B(z_0, r)$, ונניח שעבור $n=0,1,2...$, $f^{(n)}(z_0)=0$. אזי $f(z)=0$ ב-$B(z_0,r)$.

<u>הוכחה:</u> לכל $z \in B(z_0, r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=0$. לפי הנתון.

<u>מש"ל</u>

<u>משפט 10:</u> יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ תחום פתוח וקשיר. נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב-D, ונניח שקיימת נקודה $z_0 \in D$ כך ש-$f^{(n)}(z_0)=0$ לכל $n=0,1,2...$.

אזי $f(z)\equiv 0$ לכל $z \in D$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר

$$D_1=\{z\in D \mid f^{(n)}(z)=0 \ (\forall n=0,1,2...)\}$$

$$D_2=\{z\in D \mid \text{יש } n \text{ כך ש } f^{(n)}(z)\neq 0\}$$

ברור - $D_1 \cup D_2 = D$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

<u>טענה 1:</u> D_1 פתוחה.

<u>הוכחה:</u> תהי $z_1 \in D_1$. D פתוח ו-$z_1 \in D$ ולכן יש $r>0$ כך ש $B(z_1, r) \subseteq D$.

מכיוון ש-$z_1 \in D_1$, $f^{(n)}(z_1)=0$ לכל n, ולפי הלמה $f(z)\equiv 0$ ב-$B(z_1,r)$.

וממילא לכל n $f^{(n)}(z)=0$ ב-$B(z_1,r)$ ולכן $B(z_1,r)\subseteq D_1$ ולכן D_1 <u>פתוחה</u>.

<u>טענה 2:</u> D_2 פתוחה.

<u>הוכחה:</u> לפי הגדרה, $D_2=\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ כאשר $E_n=\{z\in D \mid f^{(n)}(z)\neq 0\}$.

לפי הגדרה, $E_n=[f^{(n)}]^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

מכיוון ש $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ קב' פתוחה, ו-$f^{(n)}$ רציפה לכל n $\Leftarrow$ E_n קב' פתוחה.

אזי $D_2=\bigcup E_n$ איחוד של קב' פתוחות שהוא <u>פתוח</u>.

לסיכום - $D_1\cup D_2=D$, $D_1\cap D_2=\emptyset$, ו-D_1 ו-D_2 פתוחות.

D קשיר אז בהכרח אחת מ-D_1 ו-D_2 שווה ל-D והשנייה ריקה.

אבל נתון שיש $z_0 \in D_1$. לכן בהכרח $D_1 = D$ ונובע $f(z)\equiv 0$ ב-D. <u>מש"ל</u>

הערה: משפט 10 לפונק' ממשיות אינו נכון!

למשל - $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$. אזי $f^{(n)}(0)=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$

מאינפי 2, אבל $f(x)\not\equiv 0$ ב-$\mathbb{R}$.

אם נבדוק את זה ל-$\mathbb{C}$, $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0\end{cases}$ אין סתירה

למשפט 10 שכן $f(z)$ לא רציפה ב-0 ולכן שכן לא אנליטית.

משפט 11: יהי $D\subset\mathbb{C}$ פתוח וקשיר, ותהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב-D. נניח ש $f(z)\not\equiv 0$ ב-D.

אם $z_0\in D$ ו- $f(z_0)=0$, אז יש $n\in\mathbb{N}$ ו- $g(z)$ אנליטית ב-D כך ש $g(z_0)\neq 0$, ו- $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$ לכל $z\in D$.

n ו- $g(z)$ יחידים. "n" נקרא סדר האפס של f ב-z_0.

הוכחה: נתון $f(z)\not\equiv 0$ ב-D. לכן נובע ממשפט 10 שיש $n\in\mathbb{N}$ כך ש $0=f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)$ אבל $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ כי אם לא היה קיים n כזה היינו מקבלים $f(z)\equiv 0$ ב-D בסתירה לנתון.

נפתח את f לטור טיילור סביב z_0: $f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

פיתוח זה תקף באיזה עיגול $B(z_0,r)\subset D$

נפרק - $f(z)=(z-z_0)^n\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n}}$.

זהו טור חזקות שמתכנס ב $B(z_0,r)$.

אוטומטית הוא מגדיר פונק' אנליטית, נניח

$$g(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n},\quad \forall z\in B(z_0,r)$$

נז"ב: $g(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$ לפי בחירת n, נ"ל $g(z_0)\neq 0$ כדרוש

3/5

8

ניתן להרחיב את $g(z)$ לפונק' אנליטית בכל D.

אבל אפשר פשוט להגדיר:

$$g(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n} & z\in B(z_0,r)\\[2ex] \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n} & z\in D\setminus\{z_0\}\end{cases}$$

השכלה כללית במתמטיקה

שתי ההגדרות הללו מתלכדות בתחום המשותף שלהן $B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$, הן מרכיבות פונק' אחת שאנליטית ב-D, $g(z)$, וקיבלנו את הפירוק הקודם.

נותר יחידות.

נניח שבכל D $\quad (z-z_0)^n g(z)=(z-z_0)^m h(z) \quad (m,n\in\mathbb{N})$

כאשר h,g אנליטיות ב-D ולא מתאפסות ב-z_0.

אם למשל $m>n$ אזי לכל $z_0\neq z\in D$,

$$g(z)=(z-z_0)^{m-n}h(z)$$

ולכן

$$g(z_0)\underset{\substack{\uparrow\\ (g \text{ אנליטית} \Rightarrow \text{ רציפה})}}{=}\lim_{z\to z_0}g(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{m-n}h(z)=0$$

בסתירה לנתון $g(z_0)\neq 0$.

גם אם נניח $m<n$ נקבל $h(z_0)=0$ בסתירה לנתון.

$\Leftarrow$ בהכרח, $n=m$.

נחזור לעיל- $(z-z_0)^n g(z)=(z-z_0)^n h(z)$ ולכן עבור כל $z_0\neq z\in D$

$g(z)=h(z)$ וגם

$$g(z_0)=\lim_{z\to z_0}g(z)=\lim_{z\to z_0}h(z)=h(z_0)$$

$\Leftarrow$ $g\equiv h$ והפירוק יחיד.

משה

הערה: משפט 11 לפונק' ממשיות לא נכון!
למשל עבור $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ יש אפס מסדר ∞ ב-0.
גם ל-$x^{4/3}$ יש נגזרת $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ ששווה אפס ב-0,
אבל לא קיים פירוק של משפט 11 כי אם נפרק
$f(x)=xg(x)$ נקבל $g(x)=x^{1/3}$ שעדיין מתאפסת ב-0
ואם נפרק $f(x)=x^n g(x)$ $(n>1)$ אזי $g(x)$ לא תהיה
רציפה ב-0!

<u>מסקנה למשפט 11</u>: הסדר n של האפס הוא הסדר
המיני' של נגזרת של f שלא מתאפסת ב-z_0.

<u>דוג'</u>: $f(z)=z^3(\sin z - z)^4\left[\mathrm{Log}(1+z)\right]^2$
מצאו את סדר האפס של f ב-$z=0$.

<u>תשובה</u>: נגדיר $g(z)=\sin z - z$.
$g(0)=0$, $g'(0)=\cos 0-1=0$, $g''(0)=-\sin 0=0$,
$g'''(0)=-\cos 0=-1\neq 0 \Rightarrow$ g מתאפסת מסדר 3 ב-0,
ולפי משפט 11 יש פירוק $g(z)=z^3 g_1(z)$, g_1
אנליטית ב-$\mathbb{C}$ (=שלמה) ו-$g_1(z_0)\neq 0$.
עוד נגדיר $h(z)=\mathrm{Log}(1+z)$.
$h(0)=0$, $h'(0)=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$ ול-h יש אפס מסדר 1 ב-0.
$h(z)=zh_1(z)$ כאשר $h_1(z)$ אנליטית בסביבת 0 ו-$h_1(0)\neq 0$.
נחזור ל-$f(z)$.

לפי הפירוק
$$f(z)=z^{17}\cdot g_1(z)^4 h_1(z)^2$$
לפי הבנייה, $g_1(z)$ אנליטיות בסביבת 0 ולא מתאפסות ב-0.
לכן נגדיר $\tilde{g}(z)=g_1(z)^4 h_1(z)^2$ שאנליטית בסביבת 0 ולא
מתאפסת ב-0. וזה הפירוק $f(z)=z^{17}\tilde{g}(z)$ של פונק'
בעלת אפס מסדר <u>17</u> ב-0.

מסקנה 9 למשפט 11: בנתוני המשפט, כל אפס של f מבודד (דהינו אם $f(z_0)=0$ יש $r>0$ כך ש $f(z)\neq 0$ ב- $B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$)

הוכחה: לפי משפט 11, יש פירוק $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$
כאשר g אנליטית ו $g(z_0)\neq 0$.
בפרט g רציפה ב-z_0 ולכן יש $r>0$ כך שב- $B(z_0,r)$
$g(z)\neq 0$.
כעת $(z-z_0)^n$ מתאפס רק ב-z_0 ולכן $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$
לא מתאפס ב $B(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ כדרוש.

מש"ל

תרגום מילולי של מסקנה 9: אם $f(z)\not\equiv 0$ אנליטית
בתחום קשיר D, אזי האפסים של f ב-D מבודדים.

משפט 12: (משפט היחידות לפונק' אנליטיות)
נניח $D\subset\mathbb{C}$ פתוח וקשיר, ו $\{z_n\}$ סדרה ב D
שמתכנסת ל $z_0\in D$. אזי:
א) אם f אנליטית ב-D ו $f(z_n)=0$ לכל n,
$f(z)\equiv 0$ לכל $z\in D$;
ב) אם f,g אנליטיות ב-D ו $f(z_n)=g(z_n)$ לכל n,
$f(z)\equiv g(z)$ לכל $z\in D$.

הוכחה: א) $z_0\in D$ ו f רציפה ב z_0, ולכן $f(z_0)=\lim_{n\to\infty} f(z_n)=0$
זה אומר ש z_0 היא אפס של f ב-D שאינו מבודד, שכן
בכל סביבה של z_0 יש נק' $\{z_n\}$.
ל-f יש אפס שאינו מבודד, וממסקנה 9 למשפט 11
$f(z)\equiv 0$ ב-D.
ב) נגדיר $h=f-g$. נתון $h(z_n)=0$ לכל n, וממסעיף א' $h\equiv 0$
ב-D $\Leftarrow$ $f\equiv g$ ב-D

מש"ל

מסקנה: אם $D \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה וקשיר ואם f ו-g אנליטיות ב-D ומתלכדות ברצף של נק' ב-D אזי $g \equiv f$ ב-D

הסבר: כל רצף של נק' מכיל הרבה סדרות עם גבול.

דוג': $f(z)=\sin\left(\frac{1}{z}\right)$. $f(z_n)=0$ עבור $n\in\mathbb{N}$, $z_n=\frac{1}{\pi n}$.
זאת סדרה שגבולה 0 ש-f מתאפסת על איבריה
אבל $f(z)\not\equiv 0$!
זה לא סותר את משפט 21 כי הגבול 0 לא נמצא בתחום האנליטיות של f!

הערה: משפט 21 מסביר את התופעה שמצאנו, שהרבה זהויות שמתקיימות ב-$\mathbb{R}$ הן גם נכונות ב-$\mathbb{C}$.
למשל, לכל $\theta\in\mathbb{R}$, $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$
ולכן לפי משפט 12 לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $\sin 2z=2\sin z\cos z$

הסבר: $\sin 2z$ ו-$2\sin z\cos z$ הן פונק' שלמות שמתלכדות ברצף של נק' (ב-$\mathbb{R}$). לכן לפי המסקנה למשפט 21 הן זהות בכל $\mathbb{C}$.

עוד דוג': $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$ לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$
נוכיח לפי משפט 21 שלכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ מתקיים $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

הוכחה: נקבע $x_1\in\mathbb{R}$ ונגדיר
$$f(z_2)=e^{x_1+z_2},\quad g(z_2)=e^{x_1}e^{z_2}$$
כאן f,g פונק' שלמות של z_2 שמתלכדות עבור $z_2\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow g\equiv f$ ב-$\mathbb{C}$ לפי המסקנה למשפט 12.
$\Rightarrow e^{x_1}e^{z_2}=e^{x_1+z_2}$ אם אחד מ-z_i ממשי.
כעת נקבע $z_2\in\mathbb{C}$ ונגדיר $k(z_1)=e^{z_1}e^{z_2}$, $h(z_1)=e^{z_1+z_2}$
לפי השלב הראשון $h(z_1)=k(z_1)$ לכל $z_1\in\mathbb{R}$.
h,k שלמות ולפי המסקנה למשפט 12 שהן זהות בכל $\mathbb{C}$.
$\Rightarrow e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\quad(\forall z_1,z_2\in\mathbb{C})$

משל

נקודות סינגולריות מבודדות והמסתעף

<u>הגדרה:</u> z_0 נקראת <u>נק' סינגולרית מבודדת</u> עבור $f(z)$ אם f אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 ולא ב- z_0 עצמה.

<u>דוג':</u>

(א) ל- $\frac{1}{z}$ יש סינגולריות מבודדת ב-0

(ב) אם f, g אנליטיות בתחום קשיר D, ו-$g \not\equiv 0$ ב-D אזי $\frac{f}{g}$ אנליטית ב-D פרט לנק' סינגולריות מבודדות באפסים של g.

(ג) ל- $\log(z)$ יש סינגולריות לא מבודדת בקרן השמאלית של ציר x.

<u>הגדרה:</u> סינגולריות מבודדת z_0 נקראת <u>סליקה</u> אם קיים מספר $L \in \mathbb{C}$ כך שאם נגדיר $L = f(z_0)$ אזי f תהיה אנליטית ב-z_0 (בסביבה שלמה שלה)

<u>דוג':</u>

(א) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \neq 0$

f סינגולרית רק ב-0. נראה שזו סינגולריות סליקה.

ובכן לכל $z \in \mathbb{C}$, $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}$

$\forall z \neq 0$, $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \cdots$

אגף ימין הוא טור חזקות שמתכנס בכל $\mathbb{C}$. נקרא לו $g(z)$.

g שלמה ולכל $z \neq 0$, $g = f = \frac{\sin z}{z}$.

לכן אם רק נגדיר $f(0) = 1$ סילקנו את הסינגולריות!

(לכאורה היה אפשר לחשב $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$ אבל זה ייתן רציפות בעוד שאנו צריכים אנליטיות!)

ב) הכללה גדולה של א)

נניח f אנליטית בסביבת z_0, ומתאפסת לסדר n ב-z_0.

לפי משפט 11 יש פירוק $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$ כך ש-

g אנליטית בסביבת z_0 ו-$g(z_0)\neq 0$.

$\Rightarrow$ ל-$\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ יש סינגולריות סליקה ב-z_0, ולסילוק הסינגולריות

נגדיר אותה ב-z_0 להיות $g(z_0)$.

<u>משפט 1</u>: נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0. אזי התנאים הבאים שקולים:

א) הסינגולריות של f ב-z_0 סליקה

ב) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ קיים

ג) $f(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של z_0

(כ"א יש $M>0$ כך ש-$|f(z)|\le M$ בסביבה מנוקבת של z_0)

<u>הוכחה: א $\Rightarrow$ ב</u>

א) אומר שיש $L\in\mathbb{C}$ כך שאם נגדיר $L=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ אזי f תהיה רציפה ב-z_0.

כ"א $L=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ובפרט הגבול קיים!

<u>ב $\Rightarrow$ ג</u>

נתון $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L$. אזי לפי הגדרה, עבור $\varepsilon=1$ יש $\delta>0$

כך שאם $0<|z-z_0|<\delta$ אזי $|f(z)-L|<1$.

לכן אם $0<|z-z_0|<\delta$ אזי

$|f(z)|-|L|\le|f(z)-L|<1 \Rightarrow |f(z)|<1+|L|$

בסביבה מנוקבת של z_0 (כלומר $0<|z-z_0|<\delta$)

ולכן f חסומה בסביבה מנוקבת של z_0.

3/5

8

ג $\Rightarrow$ א

נתון $|f(z)| \le A$ בסביבה <u>מנוקבת</u> B של z_0.

נגדיר פונק' עזר

$$g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^2 f(z) & z\in B\setminus\{z_0\}\\ 0 & z=z_0\end{cases}$$

g רציפה ב-z_0 כי

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\underbrace{(z-z_0)^2}_{\to 0}\underbrace{f(z)}_{\text{חסום}}=0=g(z_0)$$

<u>טענה</u>: g גזירה ב-z_0 ו-$g'(z_0)=0$.

<u>הוכחת הטענה</u>: לפי הגדרה,

$$g'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^2 f(z)-0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\underbrace{(z-z_0)}_{\to 0}\underbrace{f(z)}_{\text{חסום}}=0$$

בנק' של B ברור ש-g אנליטית ולכן היא אנליטית ב-$T=B\cup\{z_0\}$

וכיוון ש $g(z_0)=g'(z_0)=0$ קיים ל-g אפס מסדר $n\ge 2$ ב-z_0.

לפי משפט 11 מהפרק הקודם יש ל-g פירוק

$$g(z)=(z-z_0)^n h(z)$$

לכל $z\in T$ כאשר h אנליטית ב-T ו-$h(z_0)\neq 0$

<u>אבל</u> בפרט לכל $z\in B$ $g(z)=(z-z_0)^2 f(z)$ ולכן ב-B מתקיים

$$f(z)(z-z_0)^2=g(z)=(z-z_0)^n h(z)$$

כיוון ש $n\ge 2$ ולכן לכל $z\in B$ $f(z)=(z-z_0)^{n-2}h(z)$. אגף ימין אנליטי גם ב-z_0

לכן אם $n=2$ נגדיר $f(z_0)=h(z_0)$ ואם $n>2$ נגדיר $f(z_0)=0$

ואז f תהיה אנליטית בכל T, וסילקנו את הסינגולריות.

הגדרה: תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0. אומרים של־$f(z)$ **קוטב** ב־z_0 אם

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

שקול: אם $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

למה קוראים לקוטב קוטב?
כי הגבול שואף לקוטב של הכדור של רימן (ראה הרצאה 1)

<u>משפט 2</u>: נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0.
אזי קיים ל-f קוטב ב-z_0
$\Longleftrightarrow$ יש $n\in\mathbb{N}$ ופונק' אנליטית $g(z)$ שאנליטית בסביבה שלמה של z_0 כך ש-$g(z_0)\neq 0$ ו-$f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)$ בסביבה מנוקבת של z_0.
n, g הם יחידים, "n" נקרא <u>סדר הקוטב</u> של f ב-z_0.

<u>הוכחה</u>: $\Leftarrow$ נניח יש פירוק $f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)$
כאשר g אנליטית בסביבה של z_0 וגם $g(z_0)\neq 0$
ברור כי
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{-n}g(z)=\text{"}\infty\cdot \underbrace{g(z)}_{\neq 0}\text{"}=\infty$$
לכן יש ל-f קוטב ב-z_0.

$\Rightarrow$ נניח $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$
נובע כי $f(z)\neq 0$ ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0. נגדיר $h(z)=\frac{1}{f(z)}$. לכן $h(z)$ אנליטית ב-Ω.
נשאיף
$$\lim_{z\to z_0} h(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$$
$\lim_{z\to z_0} h(z)$ קיים ולכן לפי משפט 1 הסינגולריות של h ב-z_0 סליקה, ואם נגדיר $h(z_0)=0$, אזי h תהיה אנליטית בסביבה שלמה $T=\Omega\cup\{z_0\}$ של z_0.
כיוון ש-$h(z_0)=0$. אזי יש פירוק יחיד $h(z)=(z-z_0)^{n}k(z)$

כאשר $M\in\mathbb{N}$ ו-$k(z)$ אנליטית ב-D ו-$k(z_0)\neq 0$

לבסוף נגדיר $g(z)=\frac{1}{k(z)}$.

$k(z_0)\neq 0$ ולכן g אנליטית בסביבת z_0 ו-$g(z_0)\neq 0$.

לכן

$$f(z)=\frac{1}{h(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n}\frac{1}{k(z)}=(z-z_0)^{-n}g(z)$$

וקיבלנו את הפירוק המבוקש.

נשים לב שבגלל יחידות הפירוק של $h(z)$ כשכבר הוכחנו גם פירוק זה יחיד.

מש"ל

<u>דוגמה</u>: אפיינו את הסינגולריות של

$$\frac{\sin^3(\pi z)(\operatorname{Log} z)^2}{(1+\cos\pi z)^5(z^3-1)}$$

בנק' $z=1$.

<u>תשובה</u>: נגדיר

$$g(z)=\sin\pi z\Rightarrow g(1)=0$$

$$g'(z)=\pi\cos\pi z\Rightarrow g'(1)\neq 0$$

לכן יש ל-g אפס מסדר 1 ב-1, ויש פירוק $g(z)=(z-1)g_1(z)$ כך ש-g_1 אנליטית בסביבת 1 וגם $g_1(1)\neq 0$.

כמו כן

$$\operatorname{Log} 1=0,\ \operatorname{Log}' 1\neq 0$$

$\Leftarrow$

$$\operatorname{Log} z=(z-1)h_1(z),\ h_1(1)\neq 0$$

עוד נגדיר

$$k(z)=(1+\cos\pi z),\ k(1)=0$$

$$k'(z)=-\pi\sin\pi z,\ k'(1)=0$$

$$k''(z)=-\pi^2\cos\pi z,\ k''(1)\neq 0$$

$\Leftarrow$ יש ל-k אפס מסדר 2 ב-1 ויש פירוק

$$k(z)=(z-1)^2k_1(z),\ k_1(1)\neq 0$$

10/5

אנליטי בסביבת 1
שאינו מתאפס ב-1

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$$

כמו-כן

נחזור לפונק' המקורית

$$\frac{\sin^3(\pi z)(\log z)^2}{(1+\cos \pi z)^5(z^3-1)}=\frac{(z-1)^3 g_1^3(z)\,(z-1)^2 h_1^2(z)}{\left((z-1)^2 k_1(z)\right)^5 (z-1)(z^2+z+1)}=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^6}f_1(z)$$

כאשר

$$f_1(z)=\frac{g_1^3(z)\,h_1^2(z)}{k_1^5(z)(z^2+z+1)}$$

שאנליטית בסביבת 1 וגם $f_1(1)\neq 0$.

$\Leftarrow$ כל הסימנים מובילים לקוטב מסדר 6 ב- $z=1$

(נשים לב - אם היה נתון $\frac{1}{f}$ היינו מקבלים 0 מסדר 6!) משל

<u>הגדרה:</u> כל סינגולריות מבודדת של פונק' אנליטית שאינה סליקה ואינה קוטב נקראת <u>סינגולריות עיקרית</u>

עפ"י משפט 1 והגדרת הקוטב, z_0 סינגולריות עיקרית של f $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0} f(z)$ לא קיים - לא 0 ולא ∞ ולא סופי!

<u>דוגמה:</u> נוכיח של $f(z)=e^{1/z}$ סינגולריות עיקרית ב-0.

<u>פתרון:</u> נבחר ה-x, $\frac{1}{x}\to-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}=\infty \quad (\tfrac{1}{x}\to\infty), \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}=0$$

בשני כיוונים קיבלנו גבולות שונים

$\Leftarrow$ $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ לא קיים, והסינגולריות עיקרית

יותר פשוט- נגדיר y, $z=iy$

$$\lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{iy}} = \lim_{y\to 0} e^{-\frac{i}{y}} = \lim_{y\to 0} \operatorname{cis}\left(-\frac{1}{y}\right)$$

שלא קיים אפילו במובן הרחב.

לכן הסינגולריות של f ב-0 עיקרית.

משפט 3: (משפט ויירשטראס-קסורטי)

נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבת z_0 ובעלת סינגולריות עיקרית ב-z_0.

אזי עבור כל סביבה מנוקבת של z_0, התמונה $f(D)$ צפופה ב-$\mathbb{C}$.

(**תזכורת:** D צפופה ב-$\mathbb{C}$ $\iff$ $cl(D)=\bar{D}=\mathbb{C}$)

יענו סגור

הוכחה: (בדרך השלילה)

אם מסקנת המשפט לא נכונה, אזי יש סביבה מנוקבת D של z_0 כך ש-$f(D)$ לא צפופה ב-$\mathbb{C}$

$\Leftarrow$ יש איזה כדור פתוח $B(z_1, r)$ כך ש-$f(D)\cap B(z_1,r)=\emptyset$

אם כן לכל $z\in D$, $|f(z)-z_1|\ge r$

כעת נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)-z_1}$

אם $|f(z)-z_1|\ge r$ $\Leftarrow$ בפרט $f(z)-z_1\ne 0$ ולכן $g(z)$ אנליטית ב-D.

גם לכל $z\in D$, $|g(z)|=\left|\frac{1}{f(z)-z_1}\right|\le\frac{1}{r}$

ובפרט $|g(z)|$ חסומה ב-D.

לפי משפט 1, הסינגולריות של g ב-z_0 סליקה (תיזכרו מליוביל!)

בפרט קיים גבול $\lim_{z\to z_0} g(z)=L\in\mathbb{C}$

כ"א $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)-z_1}=L$

אך $\ell\neq 0$, אזי נוכל להפעיל אריתמטיקה של גבולות
כלומר

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)-z_1} = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = \frac{1}{\ell}+z_1$$

שלפי משפט 1, הסינגולריות של f ב-z_0 סליקה
בסתירה

אך $\ell=0$, אזי $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)-z_1}=0$ ונסיק $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$
ולכן יש ל-f קוטב ב-z_0.

בכ"מ הגענו לסתירה לטענה שהסינגולריות של f ב-z_0 עיקרית. הסתירה מוכיחה את המשפט.
מש"ל

הערה: פיקרד שיפר את תוצאות משפט 3 והוכיח שאם z_0 היא סינגולריות עיקרית של f, ואם Ω סביבה מנוקבת של z_0, אזי בהכרח $f(\Omega)=\mathbb{C}$ או $f(\Omega)=\mathbb{C}\setminus\{z_1\}$ עבור איזשהו $z_1\in\mathbb{C}$.

בהמשך נחקור עוד סינגולריות מבודדות.
תחילה נוסיף כמה משפטים כלליים שנצרכים להמשך.

למה: תהי γ מסילה חלקה במישור, ותהי $f=u+iv$ רציפה ב-γ. אזי

$$\int_\gamma f(z)dz \underset{\text{פורמלית}}{=} \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma u\,dy+v\,dx$$

כאשר אגף ימין מוגדר היטב באינפי 4

<u>הוכחה:</u> נניח ש-γ מתוארת ע"י $z=z(t)$, $t\in[a,b]$
בסימון $z(t)=x(t)+iy(t)$ המוכר לנו

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt=$$

$$=\int_a^b [u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))]\,[x'(t)+iy'(t)]\,dt=$$

תבדקו [illegible]

$$=\int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)]\,dt$$

$$+i\int_a^b [u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),y(t))x'(t)]\,dt=$$

$$=\int_\gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\gamma u\,dy+v\,dx$$

מש"ל

<u>משפט 4</u> (משפט קושי המוכלל)

נניח $\overline{D}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ_1 חיצונית ומסילות ז'ורדן פנימיות $\gamma_2,\dots,\gamma_n$ המכוונות חיובית ביחס ל-D.
עוד נניח ש-$f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב-$\overline{D}$.

אזי

$$\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_n} f(z)dz=0$$

שקול - אם נכוון את γ_k <u>נגד</u> כיוון השעון
אזי

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz=\sum_{k=2}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz$$

הוכחה: f אנליטית בתחום הסגור ($f\in C^{\infty}(\bar{D})$).

$\Leftarrow$ נפעיל את משפט גרין, ולפי הלמה,

$$\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} u\,dx-v\,dy+i\oint_{\gamma_k} u\,dy+v\,dx$$

$$\overset{\text{גרין}}{=}\iint_D\cancel{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}dx\,dy+i\iint_D\cancel{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)}dx\,dy=0$$

לפי קושי-רימן

משל

משפט 5: (נוסחת קושי המוכללת)

נניח ש- $D\subset\mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילות ז'ורדן $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ המכוונות חיובית ביחס ל- D.

נניח ו- f מוגדרת ואנליטית ב- $\bar{D}$. אזי לכל $z_0\in D$,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

הוכחה: לכל $z\in\bar{D}$ נגדיר

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z\neq z_0\\ f'(z_0) & z=z_0\end{cases}$$

$\Leftarrow$ בכל $z_0\neq z\in D$, g אנליטית.

ב- z_0 יש סינגולריות סליקה, שכן

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

קיום הגבול מראה שהסינגולריות של g ב- z_0 היא סליקה

$\Leftarrow$ ע"י ההגדרה $g(z_0)=f'(z_0)$ סילקנו את הסינגולריות!

לכן g אנליטית ב- $\bar{D}$, ונפעיל את משפט 4.

לכן, אין γ_1 חיצונית ל-D, ו-$\gamma_2 \dots \gamma_n$ פנימיות ל-D,
אזי

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\,dz = \sum_{k=2}^{n} \oint_{\gamma_k} g(z)\,dz$$

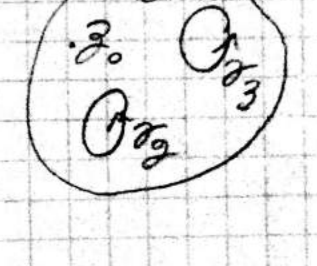
$z_0 \in D$ ולכן הוא לא באחת העקומות γ_k, ולכן נרשום

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \oint_{\gamma_1} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \sum_{k=2}^{n} \left(\oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \oint_{\gamma_k} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz \right)$$

עבור $1 \le k \le n$ נרשום

$$\int_{\gamma_k} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0) \int_{\gamma_k} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z_0)$$

$$= \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$



לכן

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} - 2\pi i f(z_0) = \sum_{k=2}^{n} \oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

נעביר אגף ולהסיק

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz + \sum_{k=2}^{n} - \oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \right]$$

בגלל הכיוון השלילי

זה שקול ל

New

<u>בשיעור הבא</u> נוכיח שאם $f(z)$ מוגדרת ואנליטית
בטבעת $\{z \in C : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$
אזי בטבעת זו f מתפתחת לטור לורן

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

<u>הגדרה:</u> <u>טבעת</u> $A(z_0, r_1, r_2)$ היא הקבוצה
$\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$

כמובן יש <u>טבעות סגורות</u>

$\overline{A(z_0, r_1, r_2)} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \le |z-z_0| \le r_2\}$

<u>בפרט</u> $A(z_0, 0, r_2)$ = סביבה מנוקבת של z_0
$A(z_0, r_1, \infty)$ = החוץ של עיגול סגור $\overline{B(z_0, r_1)}$.

<u>משפט 6:</u> נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בטבעת סגורה $\overline{A(z_0, r_1, r_2)}$ (כך ש $0 < r_1 < r_2 < \infty$)
אזי $f(z)$ מתפתחת לטור לורן יחיד,
ז"א לכל $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ (<u>פתוח</u>), מתקיים

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

והטור מתכנס ל-$f(z)$ בכל תת-טבעת סגורה $\overline{A(z_0, \rho_1, \rho_2)}$
כאשר $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$

<u>הוכחה:</u> לפי נוסחת קושי המוכללת, אם $z \in A(z_0, r_1, r_2)$
אזי

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw}_{d_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw}_{d_2}$$

כעת ב- d_1, $|z-z_0| < r_2$ ו- $|w-z_0| = r_2$, ולכן $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$

נרשום

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

לפי כך

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r_2)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

כמו בהוכחה של טיילור, הטכור מתכנס במ"ש עבור $w \in C(z_0, r_2)$ ונחליף את סדר הפעולות

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right]}_{a_n} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

נעבור ל- I_2. כאן $|z-z_0| > r_1$ ו $|w-z_0| = r_1$

לכן

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{\frac{w-z_0}{z-z_0} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

לפי כך

$$-I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r_1)} \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r_1)} f(w)(w-z_0)^n\right]}_{b_{n+1}} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$\overset{\text{הזזת אינדקסים}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

לכן

$$f(z)=d_1+(-d_2)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

כדרוש

נזכיר ש- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ הוא טור חזקות ולכן הוא בהכרח מתכנס באיזה עיגול - אבל הוא מתכנס בטבעת $A(z_0,r_1,r_2)$ ולכן הוא מתכנס בכל העיגול $B(z_0,r_2)$ ובמ"ש בעיגול $\overline{B(z_0,\rho_2)}$ כך ש $0<\rho_2<r_2$.

כמו-כן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ הוא טור חזקות במשתנה $\frac{1}{z-z_0}$ ולכן הוא מוכרח להתכנס בחוץ של איזה עיגול (*) וכאן הוא יתכנס בכל $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|>r_1\}$ ובמ"ש בתחומים כגון $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|\geq\rho_1\}$ כך ש $r_1<\rho_1$.
נחבר את התוצאות להסיק שטור לורן מתכנס במ"ש בטבעות מהסוג $\overline{A(z_0,\rho_1,\rho_2)}$ כך ש $r_1<\rho_1<\rho_2<r_2$

כדרוש

((*) כי אם $\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<a$ (התכנסות בעיגול של טור חזקות) אזי $|z-z_0|>a$ ובכך מחוץ למעגל כדרוש!)

נותרה יחידות.

ובכן בקיצור נניח שלכל $z\in A(z_0,r_1,r_2)$ מתקיים

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

ניקח $k\in\mathbb{C}$ ונכפיל: $f(z)(z-z_0)^k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+k}$

נבחר $r_1<r<r_2$ ונחשב

$$\oint_{C(z_0,r)} f(z)(z-z_0)^n\,dz=\oint_{C(z_0,r)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+k}\,dz$$

ע"י התכנסות במ"ש במעגל הפנימי $C(z_0,r)$ נקבל שאגף ימין הוא

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{C(z_0,r)} c_n (z-z_0)^{n+k} dz$$

נעיר כי אם $-1\neq n+k$ אזי לפונק' $(z-z_0)^{n+k}$ יש פונק' קדומה $\frac{(z-z_0)^{n+k+1}}{n+k+1}$ ולכן האינט' מתאפס.

עבור $-1=n+k$ אינט' זה שווה $2\pi i$ כפי שראינו בפרק על אינט').

לכן עבור כל $k\in\mathbb{Z}$ ולכל $r_1<r<r_2$ נקבל

$$\oint_{C(z_0,r)} f(z)(z-z_0)^k dz = 2\pi i\, \underbrace{c_{-1-k}}_{\text{המקדם ה-}-1-k}$$

ולכן עבור כל n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0,r)} f(z)(z-z_0)^{-1-n} dz$$

וה- c_n יחידים.

מש"ל

<u>מסקנה:</u> גם אם נתון כי f אנליטית בטבעת פתוחה $A(z_0,r_1,r_2)$, $0\le r_1<r_2\le\infty$ אפשר לפתח את f בטבעת לטור לורן.

דוגמאות:

1) הפונק' $z^5e^{1/z}$ אנליטית בטבעת $A(0,0,\infty)$

דהיינו $\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z|<\infty\}$

מצא פיתוח לורן בטבעת

תשובה:

לכל $w\in\mathbb{C}$ ידוע $e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$. לכל $w\neq 0$ נציב $w=\frac{1}{z}$ ונקבל

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

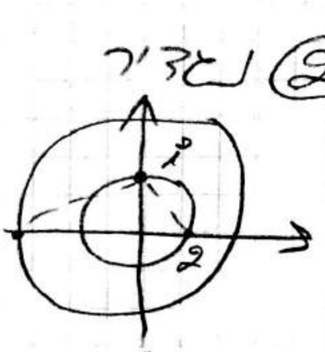
לכן

$$\boxed{z^5e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{5-n}}$$

עבור $z\neq 0$ פיתחנו את $z^5e^{1/z}$ לטור בחזקות חיוביות ושליליות של z. לפי היחידות, זהו טור לורן של הפונק'

2) נגדיר $f(z)=\frac{1}{z^2+2z-8}=\frac{1}{(z+4)(z-2)}$

$f(z)$ אנליטית בטבעת $\sqrt{5}<|z-i|<\sqrt{17}$



מצא פיתוח לורן בטבעת

תשובה: לפי שברים חלקיים,

$$f(z)=\frac{1}{(z+4)(z-2)}=\frac{A}{z+4}+\frac{B}{z-2}$$

נקבל $A=-\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{6}$ ז"א $6f(z)=-\frac{1}{z+4}+\frac{1}{z-2}$

נפתח את $\frac{1}{z+4}$ בטבעת $\sqrt{5}<|z-i|<\sqrt{17}$

ובכן $|-4-i| = \sqrt{17}$, $-\frac{1}{z+4} = \frac{-1}{(z-i)-(-4-i)}$

בטבעת $\sqrt{17} > |z-i|$ נקבל $\left|\frac{z-i}{-4-i}\right| < 1$

ונפתח לטור הנדסי

$$\frac{-1}{(z-i)-(-4-i)} = \frac{1}{(-4-i)}\cdot\left(-\frac{1}{\frac{z-i}{-4-i}-1}\right) = \frac{1}{-4-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{-4-i}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(-4-i)^{n+1}}$$

כמו כן, $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-i)-(2-i)}$, $|2-i| = \sqrt{5}$

בטבעת הנתונה $\sqrt{5} < |z-i|$ ולכן $\left|\frac{2-i}{z-i}\right| < 1$

מכאן שבטבעת

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-\left(\frac{2-i}{z-i}\right)}\,\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)^{n-1}}{(z-i)^n}$$

בסיכום, בטבעת $A(i,\sqrt{5},\sqrt{17})$ נקבל

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-i)^{n-1}}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-4-i)^{n+1}}(z-i)^n}$$

17/5 10

בסינוס

③ הפונק' $\frac{\sin z}{z^6}$ אנליטית ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

צ"ל פיתוח לורן בתחום זה.

<u>תשובה</u>

אין הבדל בין קוסינוס לסינוס לפי האפס

לכל $z\in\mathbb{C}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

לכן לכל $z\neq 0$,
$$\frac{\sin z}{z^6} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-5}}{(2n+1)!}$$

④ (הכללה של 3)

נניח $f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, $A(z_0,0,R)$

ובעלת קוטב מסדר n ב- z_0.

צ"ל פיתוח לורן בטבעת.

<u>תשובה:</u>

ע"פי משפט 2 יש פירוק $f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)$ כאשר g

אנליטית ב- $B(z_0,R)$ ו $g(z_0)\neq 0$.

ל-g יש טור טיילור

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

לכן

$$f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n}$$

באריכות

$$f(z)=\frac{g(z_0)}{(z-z_0)^n}+\frac{g'(z_0)}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots+\frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!(z-z_0)}+\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}+\frac{g^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)\dots$$

וזה טור לורן של f.

בפרט הטור מתחיל בחזקה $-n$.

מתברר שאין קיימת ל-f סינגולריות מבודדת ב-z_0

(א) אם היא סליקה אזי טור לורן של f מכיל רק חזקות אי-שליליות

(ב) אם קיים ל-f קוטב מסדר n ב-z_0, אזי טור לורן של f מתחיל בחזקה $-n$.

(ג) אם קיימת ל-f סינגולריות עיקרית ב-z_0 אז בהכרח טור לורן של f מכיל ∞ חזקות שליליות.

א, ב, ג נוגעים לפיתוח סביב z_0 והפך ($\Leftarrow$)!

למה: נניח ש-$f(z)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, $A(z_0,0,R)$, ושבסביבה זו

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

אזי לכל $0<\rho<R$ מתקיים

$$\oint_{C(z_0,\rho)} f(z)\,dz = 2\pi i b_1$$

הוכחה: כיוון שהטור מתכנס במ"ש ב-$C(z_0,\rho)$,

$$\oint_{C(z_0,\rho)} f(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}\oint_{C(z_0,\rho)}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}\,dz+\sum_{n=0}^{\infty}\oint a_n(z-z_0)^n\,dz$$

כידוע כל האינטג' מתאפסים למעט

$$\oint_{C(z_0,\rho)}\frac{b_1}{z-z_0}\,dz=2\pi i b_1$$

$$\Leftarrow \oint_{C(z_0,\rho)} f(z)\,dz=2\pi i b_1$$

כדרוש

<u>הגדרה:</u> נניח ש-$f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת של z_0 ונשען

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

b_1 נקרא <u>השארית</u> של f ב-z_0.

בלועזית שארית=residue ולכן הסימון המקובל הוא

$b_1=\text{Res}(f,z_0)$

<u>משפט 7:</u> (משפט השארית)

נניח $D\subset\mathbb{C}$ תחום חסום ע"י מסילת ז'ורדן σ המכוונת נגד כיוון השעון.

נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב-$\bar{D}$ פרט לנק' סינגולריות $z_1\dots z_n\in D$

אזי

$$\oint_\sigma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f,z_k)$$

<u>הוכחה:</u> עבור $n\geq k\geq 1$ ניתן לבחור $r_k>0$ כך שהעיגול $B(z_k,r_k)$ מוכל ב-D וזרים זה לזה.

אזי σ יחד עם המעגלים $C(z_k,r_k)$ מהווים שפה של תחום שבסגורו f אנליטית.

$\Leftarrow$ לפי קושי המוכלל,

$$\oint_\sigma f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C(z_k,r_k)}f(z)dz$$

ולפי הלמה הכוכן זה שווה $\sum_{k=1}^{n}2\pi i\,\text{Res}(f,z_k)$

מש"ל

דוגמאות:

① $\oint_{C(0,3)} z^6 \sin\frac{1}{z}\,dz$

תשובה:

נגדיר $f(z)=z^6\sin\frac{1}{z}$. לפי משפט השאריות,

$$\oint_{C(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)$$

ובכן: לכל $w\in\mathbb{C}$, $\sin w=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$

נציב $w=\frac{1}{z}$ ונקבל $\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ולבסוף

$$z^6\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{6-2n-1}$$

לכן $\mathrm{Res}(f,0)$ הוא b_1 ששווה למקדם של z^{-1} שמתקבל עבור $n=3$ $\Leftarrow$ $\frac{-1}{7!}=\mathrm{Res}(f,0)$

$\Leftarrow$ $$\oint_{C(0,3)} z^6\sin\frac{1}{z}\,dz=\frac{-2\pi i}{7!}$$

<u>הכללה</u>: אם γ מסילת ז'ורדן שמקיפה את 0 אזי $\oint_\gamma z^6\sin\frac{1}{z}\,dz=\frac{-2\pi i}{7!}$ ואם γ לא מקיפה את 0 אזי $\oint_\gamma z^6\sin\frac{1}{z}\,dz=0$

בתרגיל הקודם חישבנו את כל טור לורן של f כדי למצוא את b_1. באמת בסינגולריות עיקרית זו הדרך.

אבל בקוטב יש כמה דרכים לקיצור החישוב של $Res(f, z_0)$:

א) נניח שב- z_0 קיים ל- f קוטב מסדר 1 (קוטב פשוט)

אזי פיתוח לורן של f סביב z_0 הוא מהצורה

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

ולכן

$$(z-z_0)f(z) = b_1 + a_0(z-z_0) + \dots$$

ומכאן

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z) = Res(f, z_0) = b_1$$

ב) הרבה פעמים קוטב מסדר ראשון ב- z_0 מתקבל כאשר $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ כאשר g, h אנליטיות בסביבת z_0, $g(z_0) \neq 0$

ו- h מתאפסת לסדר 1 ב- z_0.

כאן:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{h(z) - \underbrace{h(z_0)}_{=0}} g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

ג) אם קיים ל- f קוטב מסדר n ב- z_0, אזי יש פירוק $f(z) = (z-z_0)^{-n} g(z)$ כאשר $(z-z_0)^n f(z) = g(z)$ אנליטית בסביבה שמרכזה z_0.

לכן $g(z)$ מתפתחת לטור טיילור $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

לפי זה טור לורן של f הוא

$$f(z) = (z-z_0)^{-n} g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n}$$

עבור $k=n-1$ יש איבר בטור זה

$$\frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{-1}$$

ולכן $Res(f, z_0) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$ כאשר $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$

דוגמאות

1) $$\oint_{C(0,5)} \frac{z+1}{z^3(z-4)}\,dz$$

תשובה:

נגדיר $f(z)=\frac{z+1}{z^3(z-4)}$. לפי משפט השארית התשובה

היא $2\pi i[Res(f,0)+Res(f,4)]$

בנק' $z=4$ יש ל-f קוטב פשוט. $f(z)=\dfrac{\frac{z+1}{z^3}}{z-4}$

$$\lim_{z\to 4}(z-4)f(z)=\frac{z+1}{z^3}\Big|_{z=4}=\frac{5}{64}=Res(f,4)$$

ב-$z=0$ יש קוטב מסדר 3.

נבנה $g(z)=z^3f(z)=\frac{z+1}{z-4}$ ולפי טע' ג' נקבל

$$Res(f,0)=\frac{g''(0)}{2!},\quad g'(z)=\frac{-5}{(z-4)^2},\quad g''(z)=\frac{10}{(z-4)^3}$$

ולכן $Res(f,0)=\frac{g''(0)}{2}=-\frac{5}{64}$

$$\Leftarrow \oint_{C(0,5)} \frac{z+1}{z^3(z-4)}\,dz=2\pi i\left[\frac{5}{64}-\frac{5}{64}\right]=\underline{\underline{0}}$$

2) $$\oint_{C(0,3)} \frac{z+1}{z^3(z-4)}\,dz$$

תשובה: לפי משפט השארית, נזכור ש-4 לא בתחום ונישאר

$$\oint_{C(0,3)} \frac{z+1}{z^3(z-4)}\,dz=2\pi i\,Res(f,0)=2\pi i\left(-\frac{5}{64}\right)$$

דוגמאות

(1) $\oint_{C(0,3)} \frac{\sin z}{z^4(z-1)}\,dz$

__תשובה__

נגדיר $f(z)=\frac{\sin z}{z^4(z-1)}$. ל-f סינגולריות ב-0 וב-1

שבתחום $B(0,3)$. לכן $\int = 2\pi i[Res(f,0)+Res(f,1)]$

ב-$z=1$ יש קוטב מסדר 1 (ונקב)

$$Res(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin z}{z^4}=\underline{\sin 1}$$

ב-$z=0$ יש קוטב מסדר 3

לפי הכלל שמצאנו נגדיר $g(z)=z^3 f(z)=\frac{\sin z}{z-1}$

$$\Rightarrow Res(f,0)=\frac{g''(0)}{2}$$

$$g'(z)=\frac{(z^2-z)\cos z-\sin z(2z-1)}{z^2(z-1)^2}\Rightarrow g'(0)=\frac{0}{0}$$

וניתן למצוא ע"י לופיטל פעמיים.

זה ארוך! (יש אפילו יותר מסובך - שכן צריך לופיטל 4 פעמים!)

דרך __קצרה__ יותר - $g(z)=\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z-1}$

צ"ל $g''(0)$. נגדיר $h(z)=\frac{\sin z}{z}$

$$\Rightarrow g(z)=h(z)\frac{1}{z-1},\quad g'(z)=h'(z)\frac{1}{z-1}-h(z)\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow g''(z)=h''(z)\frac{1}{z-1}-2h'(z)\frac{1}{(z-1)^2}+2h(z)\frac{1}{(z-1)^3}$$

$$g''(0)=-h''(0)-2h'(0)-2h(0)$$

$$h(z)=\frac{\sin z}{z}=\underset{h(0)}{1}-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}$$

טיילור!

$\frac{h'(0)}{2b}$ $\quad \frac{h^{(4)}(0)}{4b}$

אבל ידוע (לא בטור) $\Rightarrow \underline{h(0)=1},\ \underline{h'(0)=0}$

$$h''(0)=-\frac{2}{6}=\underline{-\frac{1}{3}}$$

קיבלנו $g''(0) = +\frac{1}{3} - 0 - 2 = -1\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \text{Res}(f,0) = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{6} - 1$

דרך שלישית - טיילור!

$g(z) = \frac{\sin z}{z}\frac{1}{z-1}$, $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$, $\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 \dots$

כפל טורים!

$\Rightarrow g(z) = -1 - z - z^2 + \frac{z^2}{6}$, $\frac{g''(0)}{2!} =$ המקדם של z^2 $= \frac{1}{6} - 1$

$\text{Res}(f,0) = -1 + \frac{1}{6} \Leftarrow$

לבסוף, $\int = 2\pi i\left(\sin 1 - 1 + \frac{1}{6}\right)$

(2) תרגיל ממבחן) נניח $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ.
נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית וחח"ע ב-$\bar{D}$, ומעתיקה את D על תחום D'.
תהי $w \in D'$ ונחשב $I = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,dz$

(היעזרו בכך ש-f חח"ע $\Leftarrow f'(z) \neq 0$ בכל D) בטוח שהרמז לא היה אבל התיכונסטין ☹

תשובה

f חח"ע ומכאן שיש $z_0 \in D$ יחיד כך ש $w = f(z_0)$.
לכן לפונק' $g(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)-w}$ יש סינגולריות אחת
בלבד ב-D, שהיא z_0.
לכן $I = \text{Res}(g, z_0)$. המכנה מתאפס ב-z_0 (ורק שם)
ומסדר ראשון כי נגזרת מכנה שונה מ-0: $(f(z)-w)' = f'(z) \neq 0$
כעת נניח $z_0 \neq 0$ ולכן המונה לא יתאפס ב-z_0.
לכן ל-g קוטב פשוט ב-z_0 ומסדר 1 נקודה

$\text{Res}(g, z_0) = \frac{zf'(z)}{(f(z)-w)'}\Big|_{z=z_0} = \frac{z_0 f'(z_0)}{f'(z_0)} = z_0 = f^{(-1)}(w)$

$\Rightarrow I = f^{(-1)}(w)$

24/5

אך $0\in D$ ואך $f(0)=w$ אזי באינט' $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz$

יש סינגולריות ב- $z=0$.

אבל גם המונה וגם המכנה מתאפסין לסדר 1

(המונה לגבי) $\left(zf'(z)\right)'\Big|_0=\big(\underbrace{f'(z)}_{\neq 0}+\underbrace{zf''(z)}_{0}\big)\Big|_0\neq 0$ ⇐ הסינגולריות סליקה!

לכן במקרה זה $g(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)-w}$ היא חסרת סינגולריות ב-0

מכאן לפי קושי $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z-w)}dz \underset{\uparrow}{=} 0 = f^{(-1)}(w_0)$

פונק' אנליטית שיש לה קדומה בתחום ללא סינגולריות

③ נחשב $\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

תשובה:

אינט' ממשי בקורס של מרוכבות!

המכנה $=(x^2+1)(x^2+4)$ לא מתאפס ב-$\mathbb{R}$.

הפונק' $\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}$ ולכן האינט' מתכנס.

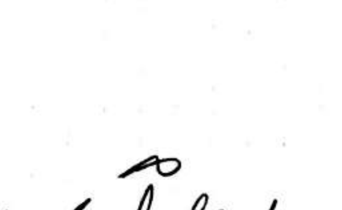
ניתן לחשב ע"י שברים חלקיים- אבל אנחנו נשתמש במשפט השאריות!

נגדיר $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}$

נשים לב ש f זוגית ולכן

$$\int_0^\infty f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \underset{\uparrow}{=}\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz=$$

$z=x$
$dz=dx$

(

כאשר)

$$=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{C_R+L_R} f(z)dz-\int_{C_R} f(z)dz\right]$$

<u>טענה:</u> $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

נשקול שבהו גבול ולא 0 זהותית! (אין זה היה 0 זהותית בלי תלות R האינט' על המסלול הסגור ששווה לRes יהיה אינט' על L_R שכבר כן תלוי ב-R כי f עולה. בסתירה!)

<u>הוכחה:</u>

על C_R $R=|z|$

לכן

$$|f(z)| = \left|\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\right| \le \frac{2|z|^2+1}{|z|^4-5|z|^2-4} = \frac{2R^2+1}{R^4-5R^2-4} = M$$

כדי להקטין
הלפנו - ב+ במונה
והפסק במכנה לפי א"ש המשולש!

ומכאן

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le ML = \frac{2R^2+1}{R^4-5R^2-4}\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

נחזור לעיל-

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac12 \lim_{R\to\infty} \int_{L_R+C_R} f(z)dz - \underbrace{\cancel{\frac12 \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz}}_{=0} = \frac12 \lim_{R\to\infty}\int_{C_R+L_R} f(z)dz$$

ל- f יש סינגולריות ב- $\pm i, \pm 2i$

וב- L_R+C_R יש את $i, 2i$

$$\Leftarrow \quad \int_0^\infty f(x)dx = \frac12 2\pi i[Res(f,i)+Res(f,2i)]$$

$$f(z)= \frac{2z^2-1/z^2+4}{z^2+1}, \quad Res(f,i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{-3/3}{2i} = \frac12 i$$

וגם כן

$$f(z) = \frac{2z^2-1/z^2+1}{z^2+4}$$

$$\Rightarrow Res(f,2i) = \frac{-9/-3}{4i} = \frac{g(2i)}{h'(2i)} = -\frac34 i$$

תשובה סופית-

$$\int_0^\infty f(x)dx = \pi i\left[\frac12 i - \frac34 i\right] = \frac{\pi}{4}$$

ולמי שיצאה תשובה מרוכבת - מקומו בחוץ!

הכללה של תרגיל 3

אם נתון $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx$ כאשר p, q פולינומים ($q \neq 0$ ב-$\mathbb{R}$)

וגם $\deg p < \deg q - 1$ (צ"ל קטן ממש ממעלה אחת פחות, דהיינו לפחות שתי מעלות פחות ואז כדי ש-$\int_{C_R}$ יתאפס - בדקו! 0 באינסוף)

$\Leftarrow$ האינט' שווה ל-$2\pi i$ כפול סכום השאריות של $\frac{p}{q}$ בחצי המישור העליון ($\operatorname{Im} z > 0$)

④ נחשב $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+5}dx$

תשובה: המכנה מתאפס אם $x = 1 \pm 2i$ ולא ב-$\mathbb{R}$

מאיפה נקבל שהאינט' מתכנס! ($\cos x < 2$ לדוגמ')

נגדיר $f(x) = \frac{\cos x}{x^2-2x+5}$ ונרשום:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \overset{\substack{z=x\\ dz=dx}}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{L_R+C_R} f(z)dz - \int_{C_R} f(z)dz\right)$$

טענה: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$

הוכחת הטענה:

$f(z) = \frac{\cos z}{z^2-2x+5}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

ולכן $C_R \ni iR$

$\cos(iR) = \cosh(R) \approx \frac{e^R}{2}$

$\Rightarrow |f(iR)| \approx \frac{e^R}{2R^2}$ <=

וזה שנקל

לכן אי-אפשר להוכיח את הטענה והשיטה נכשלת

אבל יש שיטה דומה-

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-2x+5}dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2-2x+5}dx=\lim_{R\to\infty}Re\left[\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+2x-5}dx\right]$$

(זה אינטגרל מסוג ראשון - הספק [illegible] ולכן מותר להחליף Re ו-$\int$!)

נגדיר $g(x)=\frac{e^{ix}}{x^2+2x-5}$ ונרשום

$$\lim_{R\to\infty}Re\int_{-R}^{R}g(x)dx=\lim_{R\to\infty}Re\int_{L_R}g(z)dz=\lim_{R\to\infty}Re\int_{C_R+L_R}g(z)dz-$$

$$\lim_{R\to\infty}Re\int_{C_R}g(z)dz$$

טענה: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)dz=0$

הוכחת הטענה:

$$|e^{iz}|=e^{Re(iz)}$$

אם $y=Im z\geq 0$ אזי

(כי $y\geq 0$)

$$e^{Re(iz)}=e^{Re(i(x+iy))}=e^{-y}\leq 1$$

בפרט ב-C_R, $Im z\geq 0$, ולכן $|e^{iz}|\leq 1$

$$\Rightarrow |g(z)|=\left|\frac{e^{iz}}{z^2-2z+5}\right|\leq\frac{1}{R^2-2R-5}=M\Rightarrow\int_{C_R}g(z)dz\leq ML\leq$$

$$\leq\frac{1}{R^2-2R+5}\pi R\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

נחזור לעיל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-2x+5}dx=\lim_{R\to\infty}Re\int_{L_R+C_R}\frac{e^{iz}}{z^2-2z+5}dz$$

ל-g יש סינגולריות רק ב-$1+2i$ (בחצי המישור העליון)

ולכן התשובה היא

$$Re\left[2\pi i\, Res(g,1+2i)\right]$$

$1+2i$

הקוטב פשוט ולכן

$$Res(g,1+2i)=Res\left(\frac{e^{iz}}{z^2-2z+5},1+2i\right)=\frac{e^{i(1+2i)}}{2(1+2i)-2}=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)}{4i}$$

גזרנו את המכנה

לבסוף התשובה היא

$$Re\left[2\pi i \frac{e^{-2}}{2\cdot 4i}(\cos 1+i\sin 1)\right]=\frac{\pi}{2e^{2}}\cos 1$$

<u>הכללה של תרגיל 4</u>

יהי אינט' מהסוג $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(ax)dx$ p, q פולינומים ($q(x)\neq 0$ ב $\mathbb{R}$)

$\deg p<\deg q$, $a\neq 0$ נגדיר $g(z)=\frac{e^{iaz}p(z)}{q(z)}$

ואז האינט' שווה לחלק הממשי של $2\pi i\cdot$ (סכום השאריות של g בחצי המישור העליון)

באותם התנאים על p ו-q נוכל למצוא את $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)p(x)}{q(x)}dx$

נגדיר $g(z)=\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}$ והאינט' הוא החלק המדומה של $2\pi i\cdot$ (סכום השאריות של g בחצי המישור העליון)

<u>הערה:</u> באינט' הנ"ל עם $\cos ax$ או $\sin ax$ מספיק לדרוש $\deg p<\deg q$

וזה נובע מלמת ז'ורדן

<u>למת ז'ורדן:</u> אם $a>0$ אזי $\int_0^{\pi}e^{-a\sin\theta}d\theta\le\frac{\pi}{a}$

<u>הוכחה:</u> תחילה נעיר $\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\sin(\frac{\pi}{2}-t)$

לכן $\int_0^{\pi}e^{-a\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-a\sin\theta}d\theta$

<u>טענה:</u> עבור $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ מתקיים $\sin\theta\ge\theta\frac{2}{\pi}$

<u>הוכחת הטענה:</u> נגדיר $f(\theta)=\sin\theta-\frac{2\theta}{\pi}$ $\Rightarrow f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$

כמו כן $f''(\theta)=-\sin\theta<0$ לכל $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

אם הייתה נק' הקטנה ממש מ-0 של הגרף, יש מהכרח מיני' (כי בקצוות יש התאפסות), בסתירה לשליליות f''. הסתירה מוכיחה את הטענה.

$\Leftarrow$ $\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$ בקטע. $a>0$ ולכן $-a\sin\theta\le-a\frac{2}{\pi}\theta$ ב $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}e^{-a\sin\theta}d\theta\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-a\frac{2}{\pi}\theta}d\theta=2\frac{e^{-a\theta\frac{2}{\pi}}}{-a\frac{2}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{a}e^{-a}<\frac{\pi}{a}$$

מש"ל

מסקנה: נניח p, q פולינומים, $\deg p < \deg q$, $a>0$.

אזי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iaz}\frac{p(z)}{q(z)}dz=0$

הוכחה: נגדיר $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$. $\deg p<\deg q$ ולכן $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$

נגדיר $M_R=\max_{|z|=R}|f(z)|$. נשים לב כי $\lim_{R\to\infty}M_R=0$

נרשום -

$C_R: z=Re^{i\theta},\ 0\le\theta\le\pi$

$dz=iRe^{i\theta}d\theta$

$$\int_{C_R} e^{iaz}f(z)dz = \int_0^\pi e^{iaRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}d\theta = I_R$$

$$|I_R|\le\int_0^\pi |e^{iaRe^{i\theta}}||f(Re^{i\theta})|R\,d\theta \le \int_0^\pi e^{iaRi\sin\theta}M_R R\,d\theta=$$

$$= RM_R\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}d\theta \overset{\text{ז'ורדן!}}{\le} \cancel{R}M_R\frac{\pi}{a\cancel{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow \lim_{R\to\infty} I_R=0$ כדרוש.

המסקנה היא השלב העיקרי בשיטה שלנו לחשב $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}e^{iax}dx$

ולכן השיטה עובדת ברגע ש- $\deg p<\deg q$

(5) נחשב את האינט' המפורסם $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$

תשובה:

ל- $\frac{\sin x}{x}$ יש סינגולריות סליקה ב-0 ולכן $\int_0^1$ מתכנס.

$\int_1^\infty$ מתכנס לפי דיריכלה. גם $\frac{\sin x}{x}$ זוגית ולכן

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac12\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac12\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}dx =$$

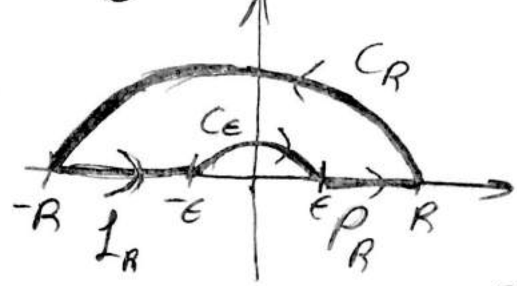
$$= \frac12\lim_{R\to\infty}\mathrm{Im}\int_{-R}^R\frac{e^{ix}}{x}dx$$

אבל ל- $\frac{e^{ix}}{x}$ יש סינגולריות ב-0 - קוטב. יש בעיה!

אלא שיש לומר שהאינט' שווה

$$\frac{1}{2}\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \operatorname{Im}\left[\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx\right]$$

ובציור -



האינט' שווה

$$\frac{1}{2}\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \operatorname{Im}\left[\int_{L_R+C_\epsilon+P_R+C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right]-\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\operatorname{Im}\left[\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right]$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\operatorname{Im}\left[\int_{C_\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz\right]$$

האינט' על $L_R+C_\epsilon+P_R+C_R$ מתאפס כי זהו אינט' על מסילה סגורה ול-$\frac{e^{iz}}{z}$ אין סינגולריות בפנים.

כמו כן $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$ לפי המסקנה ללמת ג'ורדן.

לכן התוצאה היא

$$-\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\operatorname{Im}\int_{C_\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

זה לא פתיר => הבה נתחכמה

$$-\int_{C_\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-C_\epsilon}\frac{e^{iz}-1}{z}dz+\int_{-C_\epsilon}\frac{1}{z}dz=I_1+I_2$$

$-C_\epsilon$ בכיוון ההפוך C_ϵ

נשים לב שלפונק' $\frac{e^{iz}-1}{z}$ יש סינגולריות סליקה ב-0

ולכן היא חסומה ע"י M בסביבת 0. לכן $|I_1|\le ML=M\pi\epsilon\xrightarrow[\epsilon\to 0]{}0$

כעת

$$I_2=\int_{-C_\epsilon}\frac{1}{z}dz=\int_0^\pi\frac{i\epsilon e^{i\theta}d\theta}{\epsilon e^{i\theta}}=\pi i$$

$-C_\epsilon: z=\epsilon e^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]$

$dz=\epsilon i e^{i\theta}d\theta$

$$\Rightarrow \int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\operatorname{Im}\int_{-C_\epsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(0+\pi i)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

מש"ל

עוד חישובים עפ"י משפט השארית

① עבור $k\in\mathbb{N}$, נמצא את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$

תשובה:

נתחיל מ-$k=1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

הרעיון המרכזי הוא להגדיר $f(z)=\frac{ctg(z)}{z^2}=\frac{1}{z^2}\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$

ל-f קיים קוטב מסדר 3 ב-0, ועבור $0\neq n\in\mathbb{Z}$

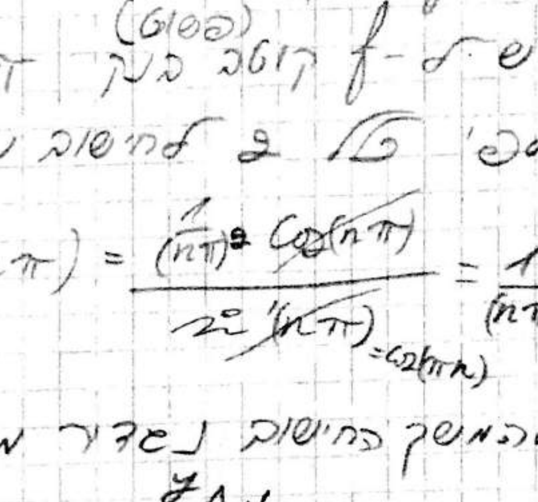
יש ל-f קוטב (פשוט) ב-πn.

לפי טל 2 לחישוב שארית:

$$Res(f,n\pi)=Res\left(\frac{\frac{1}{z^2}\cos z}{\sin z},n\pi\right)=\frac{\frac{1}{(n\pi)^2}\cancel{\cos(\pi n)}}{\underbrace{\cancel{\sin'(\pi n)}}_{=\cos(\pi n)}}=\frac{1}{(n\pi)^2}$$

להמשך החישוב נגדיר מסילות γ_N שהן מלבנים

$\gamma_N=$



לפי משפט השארית מתקיים

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_N} f(z)dz=Res(f,0)+\sum_{0\neq n=-N}^{N}\frac{1}{(n\pi)^2}=Res(f,0)+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

לפי כך שהחזקה זוגית ולכן יש סימטריה

מכאן אפשר לראות שהשיטה נכשלת עבור טורים $\sum\frac{1}{n^{2k+1}}$

כי אז החזקות השליליות מצטמצמות עם החיוביות!

נראה כי $\lim_{N\to\infty} \oint_{\partial_N} f(z)dz=0$

טענה 1: יש $K>0$ כך שלכל $z\in\partial_N$ (לכל N טבעי)
אזי $|ctg z|\le K$
צ"ל $ctg z$ חסומה באופן אחיד על כל המסילות ∂_N.

הוכחת הטענה:

$$ctg z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}} \Rightarrow i\,ctg z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$$

בקטע העליון של ∂_N, $z=x+iN \Leftarrow e^{2iz}=e^{-2N+2ix}$
ונקבל שבקטע זה $|e^{2iz}|=e^{-2N}$

$$\Rightarrow |ctg z|=|-i\,ctg z|\le \frac{1+e^{-2N}}{1-e^{-2N}}<2$$
$|-i|=1$ (כאשר $N\ge 2$)

בקטע הימני של ∂_N, $z=\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi+iy$

$$\Rightarrow e^{2iz}=e^{-2y}\underbrace{e^{i(2N+1)\pi}}_{=-1}=-e^{-2y}$$

ונקבל שבקטע זה

$$-i\,ctg z=\frac{1-e^{-2y}}{-1-e^{-2y}}$$

אם $y\ge 0$ אזי
$|1-e^{-2y}|<|-1-e^{-2y}|$ לתמיד!
$\Rightarrow |-i\,ctg z|<1$

אם $y<0$
$\Rightarrow 0<1-e^{-2y}<1$
$|-1-e^{-2y}|>1$
ולכן $|-i\,ctg z|<1$

$$|-i\,ctg z|<1$$

31/5

בסיכום, בקטע העליון ובקטע הימני של γ_N נקבל $|ctg z|<2$

ומכיוון ש $ctg z$ פונק' אי-זוגית, נקבל $|ctg z|<2$ בכל γ_N ועבור כל N.

<u>טענה 2:</u> $0=\lim_{N\to\infty}\oint_{\gamma_N} f(z)dz$

<u>הוכחת הטענה:</u>

כזכור $f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{\cos z}{\sin z}$.

ב- γ_N, $|ctg z|<2$ וגם $N^2<|z|^2$

$\Leftarrow$ $|f(z)|<M=\frac{2}{N^2}$

$|\gamma_N|=L=4N+(4N+2)\pi$

$\Rightarrow \left|\oint_{\gamma_z} f(z)dz\right|\le ML\le \frac{2}{N^2}\left(4N+(4N+2)\pi\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$

והוכחנו את טענה 2.

<u>נחזור לעיל</u>

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_N} f(z)dz=Res(f,0)+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$$

נשאיף $N\to\infty$ להסיק כי

$$0=Res(f,0)+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{2}Res(f,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

כזכור

$$f(z)=\frac{ctg z}{z^2}=\frac{1}{z^3}\cos z\,\frac{z}{\sin z}$$

ידוע $\cos z=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}\dots$, $\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{5!}\dots$

ולכן

$$\cos z \cdot \frac{z}{\sin z} = \qquad \begin{array}{l} \quad 1-z^2/3 + \dots \\ \hline 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}\dots \\ 1-\frac{z^2}{6}\dots \\ \hline -\frac{z^2}{3} \end{array} \Bigg| \; 1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{5!}\dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^3}\left[\cos z \frac{z}{\sin z}\right] = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z}\dots$$

$$\Rightarrow Res(f,0) = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{2} \cdot -\frac{1}{3} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

כעת אם נרצה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$:

נגדיר $f(z) = \frac{ctg z}{z^{2k}}$

ואז

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_N} f(z)dz = Res(f,0) + \frac{2}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}}$$

נשאיף $N \to \infty$ לקבל $\oint = 0$ ומכאן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi^{2k}}{2} Res(f,0)$$

ע"י חישוב,

$$ctg z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^4}{4725}$$

ולכן למשל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = -\frac{\pi^4}{2} Res\left(\frac{ctg z}{z^4}, 0\right) = -\frac{\pi^4}{2} \cdot -\frac{1}{45} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = -\frac{\pi^6}{2} Res\left(\frac{ctg z}{z^6}, 0\right) = \frac{\pi^6}{945}$$

fin

31/12 12

(2) עבור $a \geq 0$ נחשב $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ax \, dx$

תשובה:

א- $a=0$ יש גאוסיאן!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I \Rightarrow I^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx\,dy =$$

לא לשכוח את היעקוביאן!

$$\overset{\text{פולאריות}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\,dr = 2\pi \Rightarrow I = \sqrt{2\pi}$$

ב- עבור $a>0$ ברור שהאינט' מתכנס (מתכנס בהחלט $|\cos| \leq 1$ ו- $e^{-\frac{x^2}{2}}$ מהר מאוד)

האינט' הוא $Re \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{iax} dx$

(מותר להחליף Re ו-$\int$ כי זה ~~[illegible]~~ אינט' מסוג ראשון!)

נעיר כי

$$Im \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \sin ax \, dx = 0$$

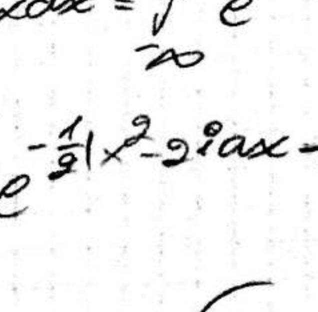
כי $e^{-\frac{x^2}{2}} \sin ax$ אי-זוגית

ג) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos ax \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2iax)} dx$$

$$\overset{\text{השלמה לריבוע}}{=} e^{-\frac{1}{2}a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2iax - a^2)} dx = e^{-\frac{1}{2}a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-ai)^2} dx$$

נציב $z = x - ai$, $dz = dx$, ונקבל

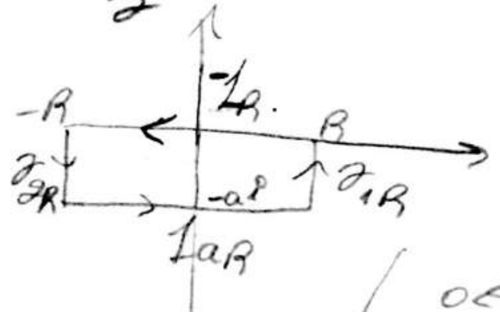
$$e^{-\frac{1}{2}a^2} \int_{L_a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



(האינט' הוא (נוכיח בהמשך

$$\lim_{R\to\infty}\int_{L_{aR}} e^{-z^2/2}dz$$

כאשר



(נוכיח ש $\int_{\gamma_{2R}}, \int_{\gamma_{1R}} \to 0$ ואז נקבל את מה שצריך)

נסמן את המלבן בציור γ_R. לפי קושי $\oint_{\gamma_R} e^{-z^2/2}dz=0$

טענה: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{1R}} e^{-z^2/2}dz=0$

הוכחת הטענה:

ב- γ_R, $-a\le y\le 0$, $z=R+iy \Rightarrow z^2=R^2-y^2+2iyR$

$$\Rightarrow \left|e^{-z^2/2}\right| = e^{\frac{y^2-R^2}{2}} \le e^{\frac{a^2-R^2}{2}} = M$$

$$\Leftarrow \left|\int_{\gamma_R} e^{-z^2/2}dz\right| \le ML \le e^{\frac{a^2-R^2}{2}}a = ae^{a^2/2}e^{-R^2/2}\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$e^{-z^2/2}$ היא זוגית, ולכן גם $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{2R}} e^{-z^2/2}dz=0$

נקבל

אינט' ממשי

$$\int_{L_{aR}} e^{-z^2/2}dz = -\int_{\gamma_{1R}}-\int_{\gamma_{2R}} e^{-z^2/2}dz + \int_{L_R} e^{-z^2/2}dz$$

בהשאפת $R\to\infty$ נקבל

$$\int_{L_{aR}} e^{-z^2}dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos ax\,dx = e^{-a^2/2}\int_{L_a} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{2\pi}\,e^{-a^2/2}$$

31/5 12

נזכיר שעבור פונק' $f(x)$ שהיא אינט' בהחלט על $\mathbb{R}$
מגדירים טרנספורם פורייה של f ע"י

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} \, dx$$

ניקח $f(x) = e^{-x^2/2}$ לדוגמא

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixt} \, dx = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}\cancel{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$$

⇐ טרנספורם של גאוסיאן הוא גאוסיאן.

[illegible]

<u>הגדרה</u>: יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח. פונק' $f: D\to\mathbb{C}$ נקראת <u>מרומורפית</u> ב-D אם היא אנליטית ב-D פרט לקטבים.

<u>דוג'</u>

① $\frac{1}{z}$ מרומורפית ב-D

② אם f, g אנליטיות ב-D ו $g(z)\not\equiv 0$ אזי $\frac{f}{g}$ מרומורפית ב-D

אתגר: (ניתן להוכיח את ההפך - כל פונק' מרומורפית ב-D היא מנה של 2 פונק' אנליטיות ב-D)

כעת נניח ש $f(z)$ פונק' מרומורפית ב-D ונגדיר את הנגזרת הלוגריתמית שלה $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$

$\Leftarrow$ אז g מרומורפית ב-D, ויש לה קטבים בקטבים ובאפסים של f.

בפרט, אם ל-f יש 0 מסדר n ב $z_0\in D$ אזי יש פירוק $f(z)=(z-z_0)^n h(z)$ כאשר h אנליטית בD ו $h(z_0)\neq 0$

$$\Rightarrow g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-z_0)^{n-1}h(z)+(z-z_0)^n h'(z)}{(z-z_0)^n h(z)}=$$

$$=\frac{n}{(z-z_0)}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

h אנליטית בD ו $h(z_0)\neq 0$, ולכן $\frac{h'(z)}{h(z)}$ אנליטית ב-z_0.

$\Leftarrow$ ל-g יש קוטב פשוט ב-z_0 ומתקיים $Res(g,z_0)=n$

כמו-כן, אם ל-f קיים קוטב מסדר m בנק' $z_1\in D$ אזי יש פירוק $f(z)=(z-z_1)^{-m}k(z)$ כאשר k אנליטית ב-D ו $k(z_1)\neq 0$.

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-m(z-z_1)^{-m-1}k(z)+(z-z_1)^{-m}k'(z)}{(z-z_1)^{-m}k(z)}=$$ שווה

$$=\frac{-m}{(z-z_1)}+\frac{k'(z)}{k(z)}$$

$\Leftarrow$ ל-g יש קוטב פשוט ב-z_1 ומתקיים $Res(g,z_1)=-m$

סיכום: ב-z_0 אפס מסדר n של f $\quad Res(\frac{f'}{f},z_0)=n$

ב-z_1 הקוטב מסדר m של f $\quad Res(\frac{f'}{f},z_1)=-m$

משפט 8: יהי γ מסילת ז'ורדן DCC תחום החסום ע"י γ המכוונת נגד כיוון השעון.

נניח $f(z)$ פונק' מרומורפית ב-$\bar{D}$ ללא אפסים וקטבים ב-γ.

נניח שב-D יש ל-f אפסים בנק' $z_1,\dots,z_m$. נסמן ב-$n(z_k)$ את סדר האפס של f ב-z_k.

נניח שב-D יש ל-f קטבים בנק' $w_1,\dots,w_l$. נסמן ב-$r(w_j)$ את סדר הקוטב של f ב-w_j.

אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{m}n(z_k)-\sum_{j=1}^{l}r(w_j)$$

בלשון בני אדם, האינט' שווה לסכום סדרי האפסים פחות סכום סדרי הקטבים.

הוכחה: לפי משפט השארית,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{m}Res\left(\frac{f'}{f},z_k\right)+\sum_{j=1}^{l}Res\left(\frac{f'}{f},w_j\right)$$

לפי מה שהבנו לפני, הסכום הוא

$$\sum_{k=1}^{m}n(z_k)-\sum_{j=1}^{l}r(w_j)$$

מש"ל

החשיבות של משפט 8 קשורה לפירוש הגאומטרי של

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

נציב - $w=f(z)$, $dw=f'(z)dz$

כאשר z מסתובב ב-γ, w מסתובב במסילה $f(\gamma)$ שהיא

פשוט התמונה של γ ע"י f. פורמלית,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w} = \text{Ind}_{f(\gamma)}(0)$$

וזה מס' האפסים פחות מס' הקטבים של f ב-Ω כולל ריבוי)

<u>הצדקת</u> ההצבה שלנו

התחלנו עם $\oint_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$

נחזור לתחילת הקורס. לחישוב האינט' ע תעבור לפרמטריזציה:

$$z=z(t),\ a\le t\le b,\ dz=z'(t)dt$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)dt$$

נשים לב -

$$w\overset{!}{=}f(z(t)),\ a\le t\le b$$

$$dw = \frac{d}{dt}f(z(t))dt = f'(z(t))\cdot z'(t)dt$$

$$\Rightarrow \oint_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))}dt = \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

<u>הכללה</u>: אם $a\in\mathbb{C}$ קבוע, אזי עם הסימונים הנ"ל יתקיים

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \text{Ind}_{f(\gamma)-a}(0) = \text{Ind}_{f(\gamma)}(0)$$

אינטואיטיבית: זה שווה למס' הפתרונות של $f(z)=a$ כולל ריבוי

מינוס מס' הקטבים של f כולל ריבוי ב-0.

משפט 9: (עקרון הארגומנט)

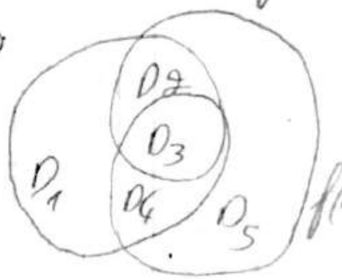
בתנאי משפט 8

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{m} n(z_k) - \sum_{j=1}^{L} r(w_j) = \text{ind}_{f(\gamma)}(0)$$

נעיר שאם f אנליטית (במקום מרומורפית) ב-D אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \text{ind}_{f(\gamma)}(0) =$$ מס' האפסים כולל ריבוי ב-D (של f)

לפי הבטלה, אם f אנליטית ב-D ואם $a\in\mathbb{C}$ קבוע אזי $\text{ind}_{f(\gamma)}(a)$ = מס' הפתרונות של $f(z)=a$ כולל ריבוי ב-D.



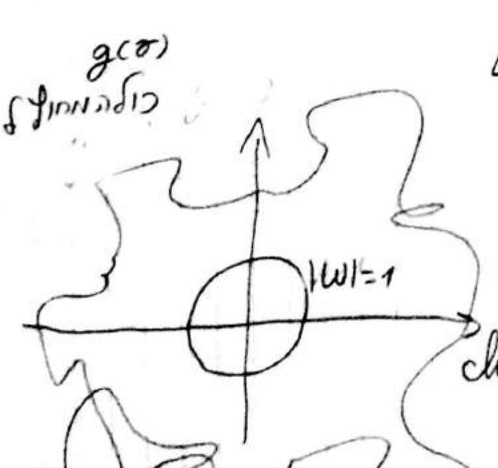
בציור - כל נק' ב-D_1 וב-D_5 מתקבלת פעם אחת ב-D ע"י f, כל נק' ב-D_2 וב-D_4 2 פעמים ובכל D_3 3 פעמים.

<u>תרגיל קשה ממבחן:</u> נניח $f(z)$ אנליטית ב-$B(0,1)$ ונניח שבשפה $C(0,1)$, $\text{Re}\, f(z) > 0$. נגדיר עבור $z\in\bar{B}_{(0,1)}$, $g(z)=ze^{f(z)}$.

הוכיחו שלכל $w\in B(0,1)$ קיים בדיוק $z_0\in B(0,1)$ אחד

<u>הוכחה:</u> נסמן $C(0,1)=\gamma$. לפי הנתון, ב-γ $0<\text{Re} f(z)$ ולכן $1<e^{\text{Re} f(z)}=|e^{f(z)}|$

$\Leftarrow$ ב-γ, $1<|e^{f(z)}|\underbrace{|z|}_{=1}=|g(z)|$



נצייר את $g(\gamma)$ במישור w.
אם $w\in B(0,1)$, לפי עקרון הארגומנט הערך w מתקבל ע"י g מס' פעמים כולל ריבוי שווה ל-$\text{ind}_{g(\gamma)}(w)$

31/5

כיוון ש-$g(\partial D)$ כולה מחוץ ל-$B(0,1)$, $\forall w\in B(0,1)$ מוקפת אותו מס' פעמים ע"י $g(\partial D)$.

<u>בפרט</u> נקבל $\text{Ind}_{g(\partial D)}(w) = \text{Ind}_{g(\partial D)}(0) =$ מס' האפסים $z\in B(0,1)$ כך ש $g(z)=0$

אבל $g(z)=ze^{f(z)}$ יש אפס פשוט רק ב-$z=0$. לפי עקרון הארגומנט, $\text{Ind}_{g(\partial D)}(0)=1$ ולכן עבור $\forall w\in B(0,1)$, $\text{Ind}_{g(\partial D)}(w)=1$ ולכן יש פתרון אחד ויחיד למשוואה $g(z)=w$ $(z\in D)$

מנשה

משפט 10: (משפט רושה)

נניח $C \subset D$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ המכוונת כנגד כיוון השעון.

עוד נניח כי $f(z)$ ו-$g(z)$ מוגדרות ואנליטיות ב-$\bar{D}$.

נניח שב-γ כבשפה מתקיים $(*)\ |g(z)| > |f(z)|$.

אזי:

(א) הפונק' $g(z)$ ו-$(f+g)(z)$ אינן מתאפסות ב-γ

(ב) ל-g ול-$f+g$ יש אותו מס' אפסים כולל ריבוי ב-D

הוכחה:

(א) בדרך השלילה, אם קיים $z_0 \in \gamma$ כך ש $g(z_0)=0$ אזי מהנתון $(*)$ נובע כי $0=|g(z_0)|>|f(z_0)|$ אבל הרי $|f(z)| \geq 0$ תמיד

$\Rightarrow g(z) \neq 0$ ב-γ.

כמו כן אם יש $z_0 \in \gamma$ כך ש $0=(f+g)(z_0)=g(z_0)+f(z_0)$ אזי $f(z_0)=-g(z_0)$ ונובע $|f(z_0)|=|g(z_0)|$ בסתירה ל $(*)$

$\Rightarrow (f+g)(z) \neq 0$ ב-γ.

(ב) נשכתב את $(*)$ - לכל $z \in \gamma$, $|g(z)| > |f(z)+g(z)-g(z)|$.

אבל הוכחנו ש$g(z) \neq 0$ ב-γ, ולכן מותר לחלק.

נרשום אפוא $\left|\frac{f(z)+g(z)}{g(z)}-1\right|<1$ לכל $z \in \gamma$.

נגדיר - $h(z) \equiv \frac{f(z)+g(z)}{g(z)}$. לפי כך ש $g \neq 0$ ו $f+g \neq 0$ ב-γ,

אזי ל-h אין קטבים ואפסים ב-γ. כמו כן, h מרומורפית ב-$\bar{D}$.

לכן אפשר להפעיל את עקרון הארגומנט של h!

כעת כבר הוכחנו $|h(z)-1|<1$ ומכאן נובע שהמסילה $h(\gamma)$ במישור ה-w נמצאת כולה בעיגול $\{w \in \mathbb{C} \mid |w-1|<1\}$

לכן $\text{Ind}_{h(\gamma)}(0)=0$

$\Leftarrow$ לפי עקרון הארגומנט,

$0=\text{Ind}_{h(\gamma)}(0)=$ מספר האפסים מינוס מספר הקטבים כולל ריבוי של h ב-D

לכן עבור h שלנו, יש אותו מס' של קטבים ואפסים כולל ריבוי ב-Ω.

אבל $h(z)=\frac{f(z)+g(z)}{g(z)}$ ולכן האפסים של h הם האפסים של $(f+g)$ והקטבים של h הם האפסים של g.

הוכחנו שמספרם כולל ריבוי שווה.

מש"ל

דוגמאות

1) כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונק' $f(z)=z^6+5z^5+2z^3+10z^2+1$ בעיגול היחידה $B(0,1)$?

תשובה

נגדיר $f(z)=z^6+5z^5+2z^3+1$, $g(z)=10z^2$

כעת בשפת התחום שהיא $|z|=1$ נקבל

$$|f(z)|=|z^6+5z^5+2z^3+1|\le|z^6|+5|z^5|+2|z^3|+1$$
$$=1+5+2+1=9<10=|10z^2|=|g(z)|$$

ל-$g(z)$ יש 2 אפסים כולל ריבוי ב-$B(0,1)$.

לפי רושה, לפונק' $p(z)=f(z)+g(z)$ יש אותו מספר, ז"א 2 אפסים כולל ריבוי ב-$B(0,1)$.

2) כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונק' $p(z)=z^6+5z^5+2z^3+10z^2+1$ בעיגול $B(0,2)$?

תשובה:

נבחר את האיבר הדומיננטי ע"י ניסוי וטעיה - $5z^5$.

אזי $g(z)=5z^5$, $f(z)=z^6+2z^3+10z^2+1$

כעת בשפת התחום שהיא $|z|=2$ נקבל

$$|f(z)|=|z^6+2z^3+10z^2+1|\le|z^6|+2|z^3|+10|z^2|+1=$$
$$=64+16+40+1<160=|5z^5|=|g(z)|$$

$\Leftarrow$ ל-g יש (לפי חישוב פשוט) 5 אפסים כולל ריבוי ב-$B(0,2)$

$\Leftarrow$ לפי רושה, גם ל-$p(z)=g(z)+f(z)$ יש 5 אפסים כולל ריבוי ב-$B(0,2)$.

③ נוכיח את המשפט היסודי של האלגברה בעזרת משפט רושה.

ולכן ניקח פולינום מרוכב שאינו קבוע

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$, $n \geq 1, a_n \neq 0$

נגדיר - $g(z) = a_n z^n$, $f(z) = P(z) - g(z)$

טענה: $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$

הוכחת הטענה:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} = \lim_{z\to\infty} \frac{a_{n-1}/z + \dots + a_0/z^n}{a_n} =$$

$$= \frac{0}{a_n \neq 0} = \underline{\underline{0}}$$

כיוון ש $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$ אזי יש $R>0$ כך שאם $R \leq |z|$ נקבל $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| < 1$ ובפרט במעגל $C(0,R)$ נקבל $|f(z)| < |g(z)|$

$\Leftarrow$ לפי רושה, בעיגול $B(0,R)$ קיין אותו מספר אפסים כולל ריבוי לפונק' $g(z)$ ו- $P(z) = f(z)+g(z)$.

עבור $g(z) = a_n z^n$ שיש לה n אפסים כולל ריבוי ב- $B(0,R)$.

נובע של- $P(z) = f(z) + g(z)$ יש בדיוק n אפסים כולל ריבוי ב $B(0,R)$.

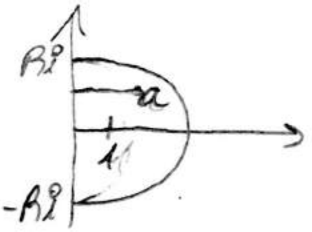
$\Leftarrow$ הוכחנו את המשפט היסודי של האלגברה. מש"ל

4) נניח $a\in\mathbb{C}$ קבוע כך ש $\mathrm{Re}(a)>1$.
הוכיחו כי למשוואה $e^{-z}+z=a$ קיים בדיוק פתרון אחד
בחצי המישור הימני ($\mathrm{Re}\,z>0$).

<u>תשובה:</u>

נגדיר $h(z)=e^{-z}+z-a$ וצ"ל של-h יש אפס אחד
ב-$\{\mathrm{Re}\,z>0\}$

נבחר R כך ש $R>|a|+1$ ונבנה מסילה γ_R כמו בציור-
הקטע γ_1 בציר y מ-Ri ל-$-Ri$, וחצי המעגל $C(0,R)$ בחצי
המישור הימני שנסמן γ_2.



<u>טענה:</u> ב-γ, $|z-a|>|e^{-z}|$

<u>הוכחת הטענה:</u> בקטע הישר γ_1,

$$|e^{-z}|=|e^{-iy}|=1,\quad |z-a|^2=(\mathrm{Re}(z-a))^2+(\mathrm{Im}(z-a))^2\ge(\mathrm{Re}(z-a))^2$$

ב-γ_1 $\mathrm{Re}\,z=0$ ולכן $(\mathrm{Re}(z-a))^2=(\underset{0}{\mathrm{Re}\,z}-\mathrm{Re}\,a)^2=(\mathrm{Re}\,a)^2>1$

$\Leftarrow$ לכל $z\in\gamma_1$, $|e^{-z}|=1<|\mathrm{Re}\,a|\le|z-a|$.

כעת ב-γ_2 נפעיל את אי-שוויון המשולש להסיק

$$|z-a|\ge|z|-|a|=R-|a|>1$$

לפי בחירת R. כיוון ש $\mathrm{Re}\,z\ge0$ ב-γ_2, $|e^{-z}|=e^{-\mathrm{Re}\,z}\le e^{-0}=1$
ושוב $|z-a|>1\ge|e^{-z}|$ כדרוש.

$\Leftarrow$ נפעיל רושה עבור $f(z)=e^{-z}$, $g(z)=z-a$: בתחום
המוקף ע"י γ, יש ל-g אפס אחד בדיוק, וכיוון
ש $|g|>|f|$ בשפה γ, גם לפונק' $h=f+g$ יש אפס
אחד בדיוק ב-D.

קיבלנו שהתוצאה לא תלויה ב-R, ולכן נסיק של-$h(z)$
יש בדיוק אפס אחד בחצי המישור הימני.

מש"ל

<u>תזכורת</u>: הבאנו את משפט קושי המוכלל-
אם D תחום החסום ע"י מסילות ז'ורדן $\gamma_1,\dots,\gamma_n$
מכוונות חיוביות ביחס ל-D, ואם $f(z)$ אנליטית ב-$\bar{D}$ אזי

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=0.$$

<u>מקרה פרטי</u>: אם $D\subset\mathbb{C}$ חסום ע"י מסילת ז'ורדן γ ואם f אנליטית ב-$\bar{D}$ אזי $\int_{\gamma} f(z)\,dz=0$.

<u>הגדרה</u>: תחום פתוח $D\subset\mathbb{C}$ נקרא תחום פשוט קשר אם המשלים של D בכדור של רימן הוא קשיר
(אם D חסום זה שקול לכך שהמשלים של D ב-$\mathbb{C}$ קשיר)
בלשון בני אדם - תחום פשוט קשר הוא "תחום ללא חורים"
דוגמה סטנדרטית - כל תחום ששפתו מסילת ז'ורדן הוא תחום פשוט קשר.

<u>עוד אפיון</u>: $D\subset\mathbb{C}$ פתוח הוא תחום פשוט קשר $\iff$ לכל $z_0\in D^c$ ולכל מסילה סגורה $\gamma\subset D$, $\text{Ind}_{\gamma}(z_0)=0$

<u>למה</u>: נניח $D\subset\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, ו-γ מסילת ז'ורדן ב-D.
נסמן ב-D_1 את התחום המוקף ע"י γ. אזי $D_1\subset D$.

<u>הוכחה</u>: ניקח נק' כלשהי $z_0\in D_1$. כידוע כאשר γ מכוונת נגד כיוון השעון אזי $\text{Ind}_{\gamma}(z_0)=1\neq 0$.
אם $z_0\in D^c$ אזי בהכרח $\text{Ind}_{\gamma}(z_0)=0$ (כי D פשוט קשר).
נסיק ש-$z_0\notin D^c$ אלא $z_0\in D$. הדבר נכון לכל $z_0\in D_1$ ולכן $D_1\subset D$ ומש"ל

משפט 11:

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח. אזי התנאים הבאים שקולים-

א) D תחום פשוט קשר

ב) משפט קושי מתקיים בלי הגבלה ב-D, דהיינו אם γ מסילה סגורה ב-D ו- $f(z)$ אנליטית ב-D אזי $\oint_\gamma f(z)dz=0$

ג) לכל $f(z)$ אנליטית ב-D יש פונק' קדומה $F(z)$ כך ש $F'(z)=f(z)$ לכל $z\in D$.

ד) לכל פונק' הרמונית $u:D\to\mathbb{R}$ יש פונק' הרמונית צמודה $v:D\to\mathbb{R}$ כך ש $u+iv$ אנליטית ב-D.

ה) אם $f(z)$ אנליטית ב-D ו $f(z)\neq 0$ לכל $z\in D$, אזי קיימת g אנליטית ב-D כך ש- $f(z)=e^{g(z)}$ לכל $z\in D$. (כלומר קיים ענף אנליטי של $\log f$ ב-D).

ו) לכל $n\in\mathbb{N}$ יש h_n אנליטית ב-D כך ש $f(z)=h_n^n(z)$ (כ"א יש ענף אנליטי של $\sqrt[n]{f(z)}$ ב-D).

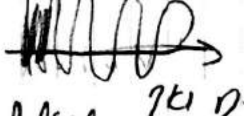
הוכחה

א=>ב

תחילה נניח כי f אנליטית ב-D, ו-γ מסילת ז'ורדן ב-D.
אזי לפי הלמה, γ מקיפה תחום $D_1\subset D$.
f אנליטית ב-D $\Rightarrow$ f אנליטית ב-D_1.
לכן ממשפט קושי המוכלל כי $\oint_\gamma f(z)dz=0$
אם γ לא מסילת ז'ורדן, בדרך כלל אפשר לחלק אותה שקר של פיצוק
למס' סופי של מסילות ז'ורדן $\gamma=\bigcup_{k=1}^{n}\gamma_k$
לפי המקרה הראשון:

$$\oint_\gamma f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}0=0$$

ואם אי-אפשר לחלק את γ למס' סופי של מסילות ז'ורדן
אפשר לקבל את התוצאה ע"י תהליך גבולי.



ב=>ג

הוכחנו בתחילת הפרק אינטגרציה שאם f רציפה ב-D ואם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל γ סגורה ב-D אזי קיימת ל-f פונק' קדומה ב-D.

ג⇐ד

נתון $u:D\to\mathbb{R}$ הרמונית. נגדיר $f=u_x-iu_y=\underbrace{U}_{u_x}+i\underbrace{V}_{-u_y}$

טענה: f אנליטית ב-D, צ"ל מקיימת משוואות קושי רימן.

הוכחת הטענה: $U=u_x$, $U_x=u_{xx}$, $V=-u_y$, $V_y=-u_{yy}$

לפי זה - $\underline{U_x-V_y}=u_{xx}+u_{yy}=\underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ הרמונית}}}{0}$ כי u הרמונית.

כמו כן, $\underline{U_y}=u_{xy}=-(-u_{yx})=\underline{-V_x}$ וקיימנו את קושי רימן!

$\Leftarrow$ f אנליטית ב-D.

לפי הנתון מ-(ג) קיימת פונק' קדומה ב-D, $\varphi=U^*+iV^*$.

כידוע, $f=\varphi'=\underset{\uparrow}{=}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=U_x^*+iV_x^*$

הנגזרת לפי z היא הנגזרת לפי x אם קושי רימן מתקיים

ולפי הגדרה $f=u_x-iu_y$

לכן, $u_x=U_x^*$, $u_y=-V_x^*\underset{\substack{\uparrow \\ \text{קושי רימן}}}{=}U_y^*$

נקבל כי $c=U^*(x,y)-u(x,y)$ (קבוע) ב-D.

ידוע כי ל-U^* יש פונק' צמודה ל-V^* ב-D.

היא גם צמודה ל-u כיוון ש-$U^*=u$ ($u=U^*-c$) ולכן הוכחנו

שלכל u הרמונית ב-D יש פונק' הרמונית צמודה ב-D.

ד⇐ה

נתון כי f אנליטית ושונה מאפס ב-D.

טענה: הפונק' $u=\log|f|$ הרמונית ב-D.

הוכחת הטענה: לפי הנתון, $u(x,y)=\frac{1}{2}\log[|f(z)|]^2$ וגם $f=U+iV$

אזי $u(x,y)=\frac{1}{2}\log[U^2(x,y)+V^2(x,y)]$

נגזור:

$$u_x=\frac{\cancel{2}UU_x+\cancel{2}VV_x}{\cancel{2}(U^2+V^2)},\quad u_{xx}=\frac{(U^2+V^2)[U_x^2+V_x^2+UU_{xx}+VV_{xx}]-2(UU_x+VV_x)^2}{(U^2+V^2)^2}$$

באופן סימטרי

$$u_{yy}=\frac{(U^2+V^2)(U_y^2+V_y^2+UU_{yy}+VV_{yy})-2(UU_y+VV_y)^2}{(U^2+V^2)^2}$$

ואז בודקים ש $\nabla^2 u=\underset{\text{לפלסיאן!}}{\underline{\Delta u}}=u_{xx}+u_{yy}=0$

הוכחה קצרה

נבחר $z_0 \in D$. אזי לפי הנתון, $f(z_0)\neq 0$

שממש, אם $0<\mathrm{Re}\, f(z_0)$ אזי יש סביבה B של z_0

כך שלכל $z\in B$, $0<\mathrm{Re}\, f(z)$. לכן ב-B מוגדרת פונק' אנליטית

$$\mathrm{Log}\, f(z) = \ln|f(z)| + i\,\mathrm{Arg}\, f(z)$$

כאן $\ln|f(z)|$ הוא החלק הממשי של פונק' אנליטית

ולכן הרמונית ב-B שמכיל את z_0.

בדרך כזו מראים ש$\ln|f(z)|$ הרמונית בכל D.

לפי הנתון מ-(ד) קיימת ל$\ln|f(z)|$ פונק' הרמונית צמודה $v:D\to\mathbb{R}$

כך ש- $h(z)=\ln|f(z)| + i\,v(z)$ אנליטית ב-D.

לבסוף נתבונן בפונק'

$$e^{h(z)} = e^{\ln|f(z)|+iv(z)} = |f(z)|e^{iv(z)}$$

נגדיר פונק' אנליטית ב-D, $g(z)=f(z)e^{-h(z)}$.

לכל $z\in D$, $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|f(z)|}|e^{-iv(z)}|=1$ ולכן לפי עקרון המקס'

$g(z)$ קבועה ב-D ו- $|g(z)|=1$, דהיינו יש $2\pi>\theta_0\geq 0$ כך שלכל $z\in D$

מתקיים $g(z)=e^{i\theta_0}$, כ"א

$$e^{i\theta_0} = g(z) = f(z)e^{-h(z)}$$

$\Rightarrow f(z)=e^{h(z)+i\theta_0}$ ואז $h_1(z)=h(z)+i\theta_0$ אזי $f(z)=e^{h_1(z)}$

כדרוש!

ה ⇐ ו

צ"ל שאם $f(z)\neq 0$ לכל $z\in D$ (ואנליטית) אזי לכל n טבעי יש h_n אנליטית

כך ש $h_n^n=f$ ב-D. אבל לפי ה, $f(z)=e^{h(z)}$ כאשר h

אנליטית ב-D. פשוט נגדיר $h_n(z)=e^{\frac{1}{n}h(z)}$ ואז לכל n

$$h_n^n(z) = e^{h(z)} = f(z)$$

א $\Leftarrow$ 1

בדרך השלילה אם D לא פשוט קשר אזי יש $z_0 \notin D$

ומסילה סגורה γ ב-D כך ש- $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$

כיוון ש-$z_0 \notin D$, הפונק' $z - z_0$ אנליטית ולא מתאפסת ב-D.

לכן לפי 1 לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת h_n אנליטית ב-D

כך ש $h_n^n(z) = z - z_0$ צ"ל לכל n,

$$m = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(h_n^n(z))'}{h_n^n(z)}\,dz =$$

חזקה ואז נגזרת

$$\overset{\text{כלל השרשרת}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{n h_n^{n-1}(z)\, h_n'(z)}{h_n^n(z)}\,dz = \frac{n}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h_n'(z)}{h_n(z)}\,dz = n\,\mathrm{Ind}_{h_n(\gamma)}(0)$$

נקבל כלומר $\mathrm{Ind}_{h_n(\gamma)}(0) = \frac{m}{n}$.

אבל לכל n, $\mathrm{Ind}_{h_n(\gamma)}(0)$ הוא מס' שלם ולכן $\frac{m}{n}$ ($m \neq 0 \in \mathbb{N}$) שלם לכל $n \in \mathbb{N}$ בסתירה!

הסתירה מוכיחה 1 $\Leftarrow$ א

משיל

מבוא להעתקות קונפורמיות

כידוע, אין גרף לפונק' אנליטית.

<u>אבל</u> אפשר לצייר תחומים או עקומות במישור ה-z ולהתבונן בתמונות שלהן ע"י הפונק' הנתונה ($w=f(z)$) במישור ה-w.

המושג "העתקה קונפורמית"

נתחיל עם מסילה γ במישור ה-z.

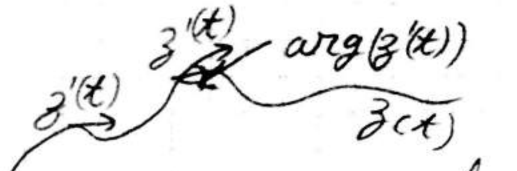
γ מתוארת ע"י הפונק' $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$

והנגזרת היא $z'(t)=x'(t)+iy'(t)$, פונק' מרוכבת של משתנה <u>ממשי</u> t.

הוקטור המתאים ל-$z'(t)$ הוא $x'(t)\hat{i}+y'(t)\hat{j}$ וזהו "וקטור מהירות" הכיוון שלו משיק ל-γ בכל נק'.

האורך שלו הוא $\left|\frac{dz}{dt}\right| = \frac{\text{השינוי ב-}z}{\text{השינוי ב-}t}$ = המהירות הסקלרית בה γ מתוארת ביחס ל-t.

הכיוון של המשיק ל-γ בכל נק' נתון ע"י $\arg z'(t)$.



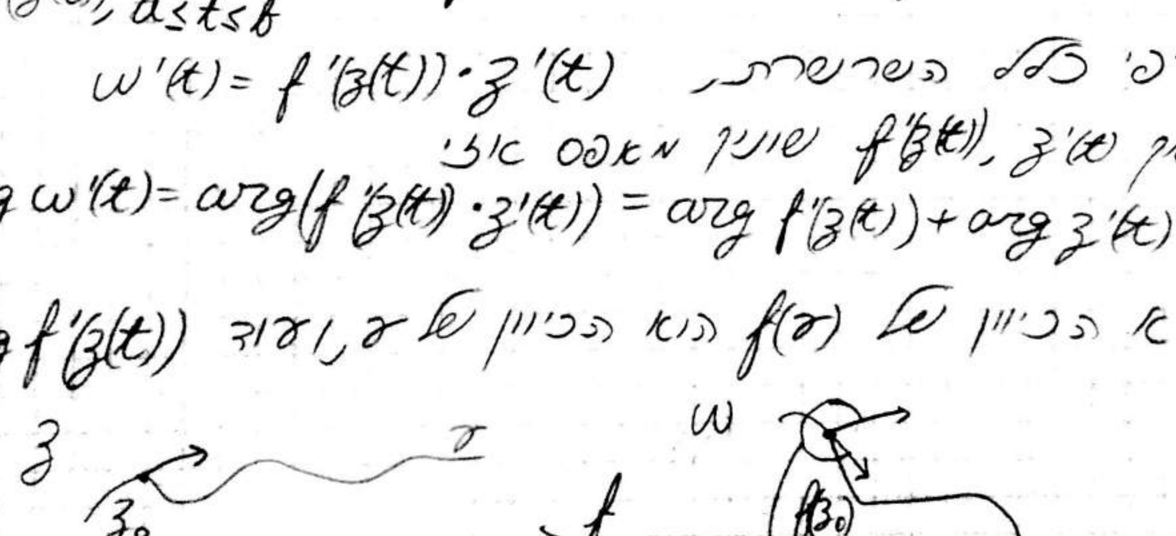
עכשיו אם f פונק' אנליטית, f מעתיקה את γ למסילה $f(\gamma)$ במישור ה-w. $f(\gamma)$ מתוארת ע"י $w=f(z(t))$, $a\le t\le b$

ע"פי כלל השרשרת, $w'(t)=f'(z(t))\cdot z'(t)$

ואם $z'(t)$, $f'(z(t))$ שונים מאפס אזי

$$\arg w'(t)=\arg(f'(z(t))\cdot z'(t)) = \arg f'(z(t))+\arg z'(t)$$

צ"א הכיוון של $f(\gamma)$ הוא הכיוון של γ, ועוד $\arg f'(z(t))$



הזווית הזו היא $\arg f'(z_0)$.

השלכה מס 2ב:

אם γ_1, γ_2 שתי מסילות שנחתכות ב-z_0,
ואין $f'(z_0)\neq 0$, אזי f מסובבת את המשיק ל-γ_1
ואת המשיק ל-γ_2 באותה זווית $\arg f'(z_0)$,
ולכן הזווית בין γ_1 ו-γ_2 שווה לזווית שבין $f(\gamma_1)$ ו-$f(\gamma_2)$
(בנק' החיתוך).

f גם שומרת מגמה בין γ_1 ו-γ_2 (הכוונה - עם כיוון השעון, נגד כיוון השעון).

העתקה ששומרת זוויות בין עקומות בנק' z_0 נקראת העתקה קונפורמית ב-z_0.

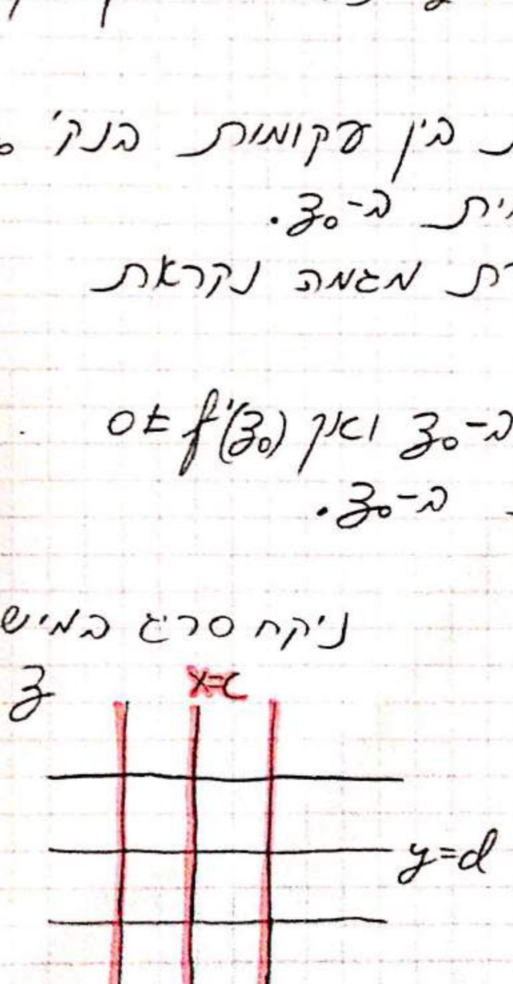
העתקה קונפורמית ששומרת מגמה נקראת העתקה קונפורמית ישרה.

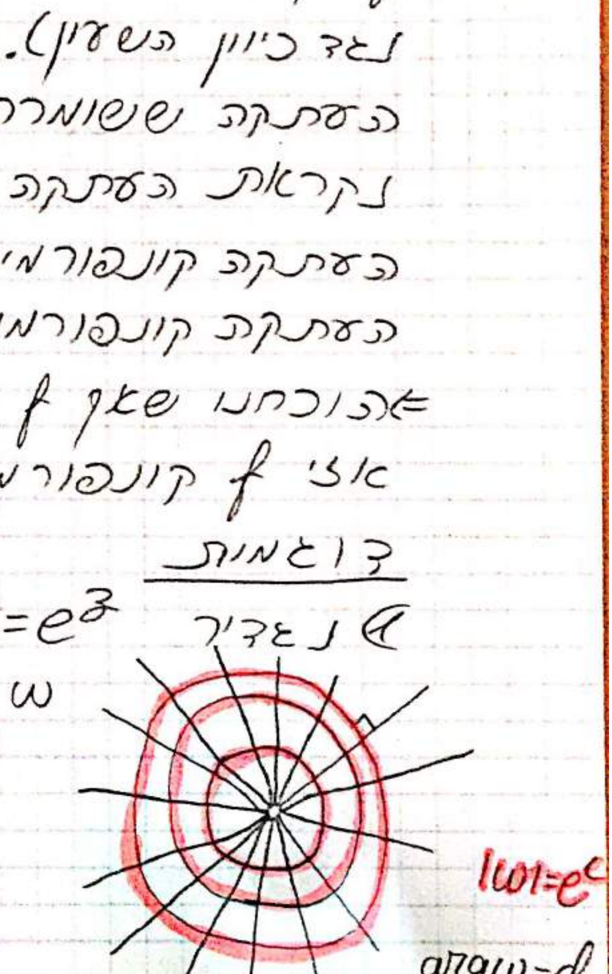
$\Rightarrow$ הוכחנו שאם f אנליטית ב-z_0 ואם $f'(z_0)\neq 0$ אזי f קונפורמית ישרה ב-z_0.

דוגמאות

① נגדיר $f(z)=e^z$

ניקח סריג במישור z





הישר $x=c$ עובר ל- $w=e^{c+iy}=e^c e^{iy}$, $-\infty<y\le\infty$
וכאשר y רץ מ-∞- ל-∞, אזי מסתובב במעגל $|w|=e^c$
∞ פעמים.

הישר $y=d$ עובר ל- $w=e^{x+id}=e^x e^{id}$, $-\infty<x<\infty$
כאשר הזווית קבועה-$d=\arg w$ ו-$|w|$ מכסה את $(0,\infty)$

מכיוון שההעתקה קונפורמית, הזוויות נשמרות -
במישור ה-z, $x=c$ ו-$y=d$ נפגשים בזוויות ישרות,
ולכן במישור ה-w כל מעגל $|w|=e^c$ פוגש קרניים $\arg w=d$
בזוויות ישרות.

② נגדיר $w=f(z)=z^2$ ונרשום $w=u+iv=\underbrace{x^2-y^2}_{u}+\underbrace{2xy}_{v}i$

הישר $u=c$ מתאים לעקומה $x^2-y^2=c$

$c=0$ נותן $y=\pm x$

$c\neq 0$ נותן היפרבולה

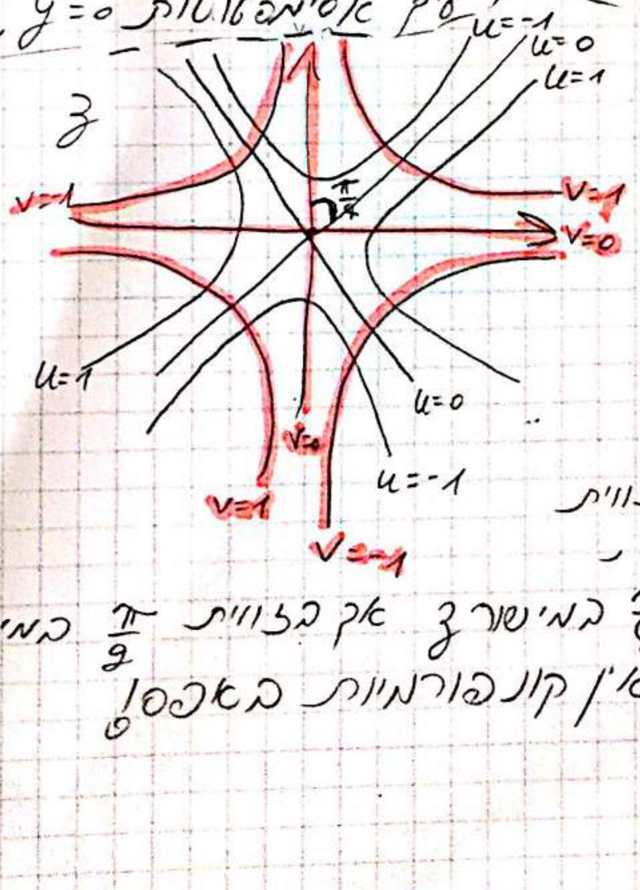
$x^2-y^2=c \iff \frac{y^2}{x^2}=1-\frac{c}{x^2}$

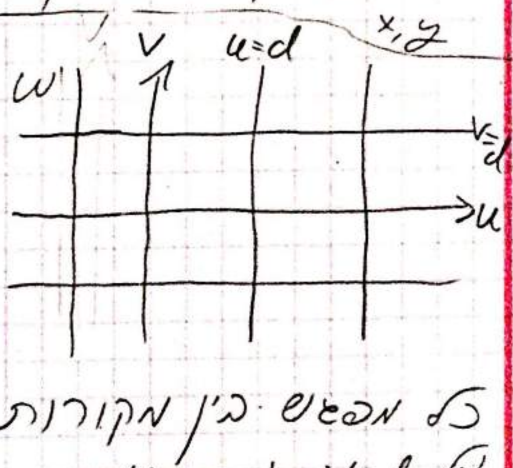
ועבור $x,y\to\pm\infty$ נקבל $y=\pm x$ אסימפטוטות

הישר $2xy=v=d$

$d\neq 0$ נותן היפרבולה עם אסימפטוטות $y=0$, $x=0$

$d=0$ נותן את הצירים x,y





כל מפגש בין מקורות של $v=d$ ו- $u=c$ הוא בזווית ישרה למעט בראשית, שכן הם נפגשים בזווית $\frac{\pi}{4}$ במישור z אך בזווית $\frac{\pi}{2}$ במישור w.

הסיבה: $f'(z)|_{z=0}=2\cdot 0=0$ ולכן אין קונפורמיות באפס.

סקירה של העתקות פשוטות

א) סיבוב - $w=f(z)=e^{i\theta}z$ ($\theta\in\mathbb{R}$ קבוע).
ההעתקה מביאה כל תחום וכל עקומה בצורה שחופפת את המקור ממש.

ב) הזזות - $f(z)=z+a$ ($a\in\mathbb{C}$ קבוע).
גם הזזה שומרת את הצורה של כל תחום.

ג) מתיחה - עבור $0<r\in\mathbb{R}$, $f(z)=rz$
גם העתקה זו שומרת על הצורה של כל תחום אבל מגדיל אותו פי r אם $r>1$, ומקטין אותו פי r אם $r<1$.

ד) טרנס' לינארית כללית - $w=az+b$, $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים
נרשום $a=re^{i\theta}$. אזי $w=re^{i\theta}z+b$ וזו הרכבה!

$$z \xrightarrow[\text{סיבוב}]{} e^{i\theta}z \xrightarrow[\text{מתיחה}]{} re^{i\theta}z \xrightarrow[\text{הזזה}]{} re^{i\theta}z+b$$

גם טרנס' זו שומרת את הצורה של כל תחום, אבל מזיזה, מסובבת ומגדילה (או מקטינה) אותו.

ה) אינברסיה - $f(z)=\frac{1}{z}$ מלכתחילה מוגדר עבור $z\neq 0$.
ניתן להגדיר $f(0)=\infty$, $f(\infty)=0$ וכך נקבל העתקה של הכדור של רימן $\mathbb{C}^*$ (באתון טופו) על עצמו באופן חח"ע ועל. בפרט יש הופכית - $w=\frac{1}{z}$.

<u>טענה</u>: האינברסיה מעתיקה מעגלים וישרים במישור ה-z למעגלים וישרים במישור ה-w.

<u>הוכחת הטענה</u>: כרגיל, $z=x+iy$, $w=u+iv$.
מעגל או ישר במישור z הוא $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$
אם $a\neq 0$ זהו מעגל, ואם $a=0$ זהו ישר.
נמצא את התמונה של העקומה הנ"ל ע"י האינברסיה.

$$x+iy=z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \Rightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$x^2+y^2=\frac{1}{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \iff \frac{a+bu-cv}{u^2+v^2}+d=0 \iff d(u^2+v^2)-cv+bu+a=0$$

קיבלנו משוואה מאותו סוג. לכן, התמונה של מעגל או ישר היא מעגל <u>או ישר</u>.

14/6

למעשה התמונה היא ישר $\Leftrightarrow$ $d=0$ $\Leftrightarrow$ העקומה המקורית עוברת באפס.

① טרנס' מביוס - טרנס' מהסוג $w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad\neq bc$

אם $a,c\neq 0$ אפשר לכתוב

$$T(z)=\frac{a}{c}\left[\frac{z+b/a}{z+d/c}\right]=\frac{a}{c}\left[1+\frac{b/a-d/c}{z+d/c}\right]$$

ולכן T שקולה לסדרת הרכבה (באופן מופשט!) הבאה:

$$z\xrightarrow[\text{הזזה}]{} z+\frac{d}{c}\xrightarrow[\text{אינברסיה}]{}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\xrightarrow[\text{סיבוב + מתיחה}]{}\frac{b/a-d/c}{z+d/c}\xrightarrow[\text{ליניארי}]{}\frac{a}{c}\left(\frac{b/a-d/c}{z+\frac{d}{c}}\right)+\frac{a}{c}$$

$\Leftarrow$ T מעתיקה את $\mathbb{C}^2$ על $\mathbb{C}^2$ באופן חח"ע, ומעתיקה מעגלים וישרים על מעגלים וישרים.

נעיר שאם $c=0$, $d\neq 0$ אזי ההעתקה היא $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ ליניארי

אם $a=0$, $c\neq 0$, נקבל $T(z)=\frac{b}{cz+d}$ שהיא ליניארית + אינברסיה.

המשך

$\boxed{\text{טרנספורמציית מביוס}}$ - $w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. כלומר טרנספורמציה מהסוג של לינארי חלקי לינארי.

נשים לב שאם $ad=bc$, זה מתנוון לקבוע, לכן נניח $ad\neq bc$.

אם $a,c\neq 0$, אפשר לפרק $T(z)=\frac{a}{c}\left[\frac{z+b/a}{z+d/c}\right]=\frac{a}{c}\left[1+\frac{b/a-d/c}{z+d/c}\right]$

לכן T שקולה לסדרת הפעולות: $z\xrightarrow[\text{הזזה}]{} z+\frac{d}{c}\xrightarrow[\text{אינברסיה}]{}\frac{1}{z+d/c}\xrightarrow[\text{מתיחה + סיבוב}]{}\frac{b/a-d/c}{z+d/c}\xrightarrow[\text{לינארי (מתיחה + הזזה)}]{}\frac{a}{c}\frac{b/a-d/c}{z+d/c}+\frac{a}{c}$

לכן T מעתיקה את S^2 על S^2 באופן חח"ע, ומעתיקה מעגלים וישרים על מעגלים וישרים (לינארי ואינברסיה).

נניח שאם $c=0$, $d\neq 0$, ההעתקה היא - $T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ לינארית!

ואם $a=0$, $c\neq 0$, ההעתקה היא - $T(z)=\frac{b}{cz+d}$ לינארית + אינברסיה.

פירקנו את T להרכבת פעולות פשוטות כדי להראות ש-T מעתיקה מעגלים וישרים על מעגלים וישרים.

נניח ש-T מעתיקה את מעגל במישור z למעגל, אזי למעגל או חצי מישור במישור של w.

כמו כן, T מעתיקה את חצי מישור לחצי מישור, למעגל או לחוץ של מעגל.

גם הראינו ש-T מעתיקה את S^2 על עצמו באופן חח"ע. אפשר לראות זאת באופן ישיר:

$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. זה מוגדר עבור $z\neq-\frac{d}{c}$. אבל נגדיר $T(-\frac{d}{c})=\infty$ כי שם הקוטב מוגדר.

כמו כן - $T(\infty)=\lim_{z\to\infty}T(z)=\frac{a}{c}$. כדי לוודא ש-T חח"ע ועל, נמצא את ההפכית:

$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow wcz+wd=az+b\Rightarrow wcz-az=b-wd\Rightarrow z=\frac{-dw+b}{cw-a}$.

כלומר, יש הפכית וגם היא מביוס - לינארי חלקי לינארי. ההפכית מוגדרת על הכל, כולל ∞ ו-$w=\frac{a}{c}$.

גם הרכבה של מביוס היא מביוס: $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $S(z)=\frac{ez+f}{gz+h}$.

אז - $S\circ T(z)=\frac{e\left[\frac{az+b}{cz+d}\right]+f}{g\left[\frac{az+b}{cz+d}\right]+h}=\frac{eaz+eb+fcz+fd}{gaz+gb+hcz+hd}=\frac{(ea+fc)z+(eb+fd)}{(ga+hc)z+(gb+dh)}$ וזו מביוס!

לכן טרנספורמציות מביוס מהוות חבורה, כאשר הכפל TS הוא ההרכבה $T\circ S$. לכל T יש הפכי שגם מביוס.

החבורה לא קומוטטיבית כי למשל אם $T(z)=z+1$, $S(z)=-z$ אז - $TS(z)=-z+1\neq-(z+1)=ST(z)$.

כעת נראה שאם z_1,z_2,z_3 3 נק' ב-S^2, אפשר לבנות טרנס' מביוס T, שמעתיקה אותן ל-$(0,1,\infty)$ בהתאמה.

במקרה שאם z_1,z_2,z_3 נק' סופיות, נגדיר - $\boxed{T(z)=\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}}$ (ואכן מתקיים $T(z_1)=0$, $T(z_2)=1$, $T(z_3)=\infty$).

אם $z_1=\infty$ (לא סופי) נגדיר - $T(z)=\frac{z_2-z_3}{z-z_3}$ ושאר התנאים מתקיימים - $T(z_1)=T(\infty)=0$.

אם $z_2=\infty$ נגדיר - $T(z)=\frac{z-z_1}{z-z_3}$, ואם $z_3=\infty$ נגדיר - $T(z)=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. בכל מקרה שאחד מה-$z_i$ הוא ∞, נוותר על 2 הגורמים בהם הוא מופיע.

המשך.

1. טרנספורמציות מביוס - המשך

<u>טענה:</u> $T(z)=\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$ היא טרנס' מביוס היחידה שמעבירה את (z_1,z_2,z_3) ל-$(0,1,\infty)$ בהתאמה.

<u>הוכחה:</u> נניח שיש S מביוס שמעבירה את (z_1,z_2,z_3) ל-$(0,1,\infty)$ בהתאמה.

אז TS^{-1} מעבירה את $(0,1,\infty)$ ל-$(0,1,\infty)$ בהתאמה.

נסמן $H=TS^{-1}$ שגם היא מביוס. אז $H(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

נציב $0,1,\infty$: $0=H(0)=\frac{b}{d}\Rightarrow \underline{b=0}$, $\infty=H(\infty)=\frac{a}{c}\Rightarrow \underline{c=0}$

לכן $H(z)=\frac{az}{d}$. כעת - $1=H(1)=\frac{a}{d}\Rightarrow \underline{a=d}$

קבל $H(z)=z$ כלומר $TS^{-1}=H=Id$ אז $\underline{T=S}$ לכן <u>T יחידה</u>.

<u>הערה:</u> ל-4 נק' z_0,z_1,z_2,z_3 שונות ששייכות ל-$\hat{\mathbb{C}}$, נגדיר את $\boxed{\text{היחס הכפול}}$ שלהן:
$(z_0\, z_1\, z_2\, z_3)=\frac{z_0-z_1}{z_0-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$ שהוא $T(z_0)$ כאשר T מביוס שמעבירה את (z_1,z_2,z_3) ל-$(0,1,\infty)$ בהתאמה.

טענה: נניח שהיחס $(z\, z_1\, z_2\, z_3)=(w\, w_1\, w_2\, w_3)$ מגדיר טרנס' מביוס $w=T(z)$,
שמעבירה את (z_1,z_2,z_3) ל-(w_1,w_2,w_3) בהתאמה.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $T_1(z)=(z\, z_1\, z_2\, z_3)$, $T_2(w)=(w\, w_1\, w_2\, w_3)$.

אז המשוואה שלנו אומרת ש- $T_1(z)=T_2(w)$ כלומר $w=T_2^{-1}T_1(z)$,

ולפי הבניה, $T_1(z)$ מעבירה את (z_1,z_2,z_3) אל $(0,1,\infty)$, ו-T_2^{-1} את $(0,1,\infty)$ אל (w_1,w_2,w_3).

לכן תשובתה המפורשת היא: $\frac{w-w_1}{w-w_3}\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$.

המשך.

1 טרנספורמציות מוביוס - המשך.

<u>תרגילי חישוב:</u>

1. מצא טרנספ' מוביוס T שמעבירה $(0,i,-i)$ ל-$(1,-1,0)$ בהתאמה.

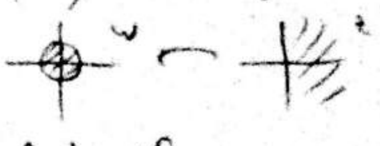
<u>פתרון:</u> נציב ביחס הכפול שלמדנו: $\frac{w-1}{w-0}\cdot\frac{-1-0}{-1-1} = \frac{z-0}{z+i}\cdot\frac{i+i}{i-0}$

כאן זה קל (כי יש נקודות שהן אפס) - $\frac{w-1}{w}\cdot\frac{1}{2} = \frac{z}{z+i}\cdot 2$

אז - $\frac{w-1}{w} = \frac{4z}{z+i} \Leftarrow 1-\frac{1}{w} = \frac{4z}{z+i} \Leftarrow -\frac{1}{w} = \frac{4z}{z+i}-1 = \frac{3z-i}{z+i}$

ולכן - $\underline{w=\frac{z+i}{i-3z}}$ זה מוביוס! נשים לב שאכן $(-i,i,0)$ עובר ל-$(0,-1,1)$ בהתאמה.

2. מצא טרנספ' מוביוס שמעבירה את חצי המישור הימני על עיגול היחידה.



<u>פתרון:</u> שתי דרכים לפתרון! לפי דרך אינטואיטיבית, מוביוס T שמעבירה את שפת חצי המישור

הימני שהוא ציר ה-y, לשפה של עיגול היחידה, שהיא מעגל היחידה.

אתה נבחר 3 נק' על ציר ה-y ונעביר אותן למעגל היחידה. אם זה בחוץ, ניקח $\frac{1}{T}$.

ובכן, נמצא T שמעבירה את $\underbrace{(0,i,\infty)}_{\text{ציר ה-y}}$ ל-$\underbrace{(1,i,-1)}_{\text{מעגל היחידה}}$ בהתאמה.

משפט לימוד גלל כי T שמעבירה את ציר ה-y (ישר) למעגל או לישר, ויש רק אחד כזה (מעגל או ישר)

שעובר דרך שלוש הנק' $(1,i,-1)$.

כשיש ∞, מצמצמים את 2 הביטויים האלה.

אז T נמצא ע"י: $(w,i,-1)$ ו-$(z,0,i,\infty)$ כלומר - $\frac{w-1}{w+1}\cdot\underbrace{\frac{i+1}{i-1}}_{-i} = \frac{z-0}{\cancel{z-\infty}}\cdot\frac{\cancel{\infty}}{i-0}$

ולכן - $\underline{\underline{w=\frac{1+z}{1-z}}} \Leftarrow wz-w=-z-1 \Leftarrow wz+z=w-1 \Leftarrow z=\frac{w-1}{w+1} \Leftarrow \frac{w-1}{w+1}(-i)=-iz$

(נשים לב שבמקרה של $z=\frac{1+w}{1-w}$ וגם $w=\frac{1-z}{1+z}$, כלומר $T=T^{-1}$) - לא חשוב.

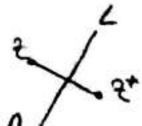
אז T זו מעבירה את ציר ה-y למעגל היחידה, ולכן חצי המישור הימני עובר

או לכדור - $B(0,1)$, או לחוץ - $|z|>1$.

נבדוק נק' אחת - אם $z=1$, $w=\infty$ ולכן T זו מעבירה את חצי המישור הימני <u>לחוץ</u> מעגל היחידה!

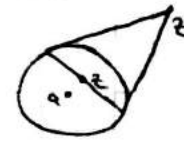
ולכן ה-T הנדרש הוא - $\underline{\underline{w=1/\frac{1+z}{1-z}=\frac{1-z}{1+z}}}$

הערה: יהי L ישר במישור. 2 נק' z,z^* $\boxed{\text{סימטריות}}$ ביחס ל-L,
אם L הוא האנך האמצעי של הקטע בין z ל-z^*.



שיקוף!

לגבי מעגל $|z-a|=R$, נק' z,z^* $\boxed{\text{סימטריות ביחס למעגל}}$ $|z-a|=R$,
אם הן מקיימות את $\boxed{\text{משפט הקלצה}}$:

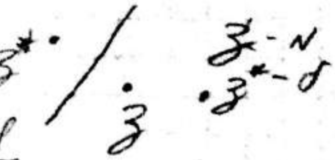


הנוסחא היא: $(z-a)(z^*-\bar{a})=R^2$

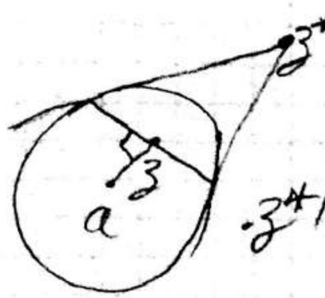
משפט: אם T מביוס ואם T מעתיקה ישר או מעגל L_1 לישר או מעגל L_2,
אז 2 נק' סימטריות ביחס ל-L_1 עוברות לנק' סימטריות ביחס ל-L_2.

<u>הוכחת היחידות</u>: נקרא לטרנס' שבנינו T ונניח שיש עוד טרנס' מביוס Q שמעתיקה את $(z_1 z_2 z_3)$
ל$(w_1 w_2 w_3)$ בהתאמה.
כבר למדנו שיש U העתקת מביוס שמעתיקה את $(w_1 w_2 w_3)$ ל$(0\,1\,\infty)$ בהתאמה.
לפי זה, UQ ו UT מעתיקות את $(z_1 z_2 z_3)$ ל$(\infty\,1\,0)$.
<u>אבל</u> כבר הוכחנו שיש טרנס' מביוס <u>יחידה</u> שמעתיקה את $(z_1 z_2 z_3)$ ל$(\infty\,1\,0)$ ולכן $UQ=UT$
נובע כי $U^{-1}UQ = U^{-1}UT$ ולכן $\underline{Q=T}$.
אך הוכחנו שכל טרנס' מביוס מעתיקה מעגל וישר על מעגל וישר.
<u>מהנדסת המישור</u> נובע כי כל שלוש נק' במישור קובעות מעגל או ישר יחיד.
לכן אם L_q ($q=1,2$) הוא ישר או מעגל במישור ורוצים להעתיק את L_1 על L_2, לוקחים שלוש נק' $(z_1 z_2 z_3) \in L_1$ ושלוש נק' $(w_1 w_2 w_3) \in L_2$ ואז טרנס' מביוס $(w\,w_1 w_2 w_3) = (z\,z_1 z_2 z_3)$ מעתיקה את L_1 על L_2.
כמו כן אם מבקשים העתקה קונפורמית וחח"ע של חצי מישור או עיגול על חצי מישור או עיגול אז בונים טרנס' מביוס שתעתיק שפה על שפה, ונשאר לבדוק שהצד הנכון של המקור עובר לצד הנכון של התמונה.
מכשיר שעוזר לבנות טרנס' מביוס עם תכונות רצויות הוא **סימטריה**.

ובכן אם L ישר במישור, הנק' z ו-z^* הן "סימטריות"
לגבי L אם z^* הוא שיקוף של z ב-L.
כ"א L הוא האנך האמצעי של הקטע מ-z ל-z^*.



אם L הוא מעגל במישור, $|z-a|=R$



בונים את הקו za, מיתר המאונך לו,
ובחיתוכי המיתר את המעגל מעבירים
שני משיקים למעגל. חיתוך המשיקים הוא z^*.
מתמטית, $(z^*-a)(\bar{z}-\bar{a})=R^2$
עובדה שימושית - הנק' הסימטרית ל-a היא ∞!

<u>משפט 1</u>: אם T טרנס' מביוס שמעתיקה ישר
או מעגל L_1 על ישר או מעגל L_2, אזי לכל
z ו-z^* שסימטריות ביחס ל-L_1, $T(z)$ ו-$T(z^*)$ סימטריות
ביחס ל-L_2.

<u>הוכחה</u>: בשתנה

דרך נוחה להעתיק חצי מישור או עיגול M_1 ששפתו
הוא ישר או מעגל L_1 על חצי מישור או עיגול M_2
שחסום ע"י L_2 היא להעביר נק' $z_1\in M_1$ על נק'
$w_1\in M_2$ ולהעתיק את הנק' הסימטרית ל-z_1 ב-L_1
שהיא z_1^* לנק' הסימטרית ל-w_1 ב-L_2 שהיא w_1^*.
עוד נעתיק את $z_2\in L_1$ (על המעגל) ל-$w_2\in L_2$.
$\Rightarrow$ נעתיק את $(z_1 z_1^* z_2)$ ל-$(w_1 w_1^* w_2)$ וזו הטרנס' המבוקשת

דוג' חישוב

1) מצאו את טרנס' מביוס הכללית ביותר שמעתיקה את עיגול היחידה $B(0,1)$ על עצמו.

<u>תשובה</u>: בוחן T מביוס כך ש $T(B(0,1))=B(0,1)$.

בהכרח יש נק' יחידה $a\in B(0,1)$ כך ש $T(a)=0$.

לפי סימטריה, $T(a^*)=\infty$.

מהי a^*? עיגול היחידה מוגדר ע"י $(z-0)(\bar{z}-0)=1^2$

לכן אם $z\in B(0,1)$, z^* מקיימת $(z-0)(\overline{z^*-0})=1^2$ דהיינו $z^*=\frac{1}{\bar{z}}$

אצלנו $T(a)=0$, $T(\frac{1}{\bar{a}})=\infty$ וכיוון שהשפה עוברת לשפה, $T(1)=e^{i\theta}$ עבור $\theta\in[0,2\pi)$ כלשהי.

<u>לכן</u> T נתונה ע"י $(z,a,\frac{1}{\bar{a}},1)=(w,0,\infty,e^{i\theta})$.

נרשום -
$$\frac{z-a}{z-1}\cdot\frac{\frac{1}{\bar{a}}-1}{\frac{1}{\bar{a}}-a}=\frac{w-0}{w-e^{i\theta}}\cdot\frac{\cancel{\infty}-e^{i\theta}}{\cancel{\infty}-0}$$
וצריך ולפרק...

אבל במבחן אין וולפרם אלפא

מה כן יש? יש שכל!

נבא מצב: $T(a)=0$, $T(\frac{1}{\bar{a}})=\infty$, ולכן
$$T(z)=c\frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}=\frac{\bar{a}c(z-a)}{\bar{a}z-1}=\bar{a}c\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

כדי למצוא את c נציב $T(1)=e^{i\theta}$, דהיינו
$$e^{i\theta}=T(1)=\bar{a}c\frac{a-1}{1-\bar{a}\cdot 1}\Rightarrow\frac{e^{i\theta}}{\bar{a}}\frac{1-\bar{a}}{a-1}=c$$

נשים לב: $\left|\frac{1-\bar{a}}{a-1}\right|=1$, ולכן $|c|=\frac{1}{|a|}$.

אבל θ משתנה חופשי, ולכן c הוא כל מס' בעל ערך מוחלט $\frac{1}{|a|}$ (או בפשטות - אנחנו חופשיים לקבוע את הפאזה) $\Leftarrow c=\frac{1}{|a|}e^{i\theta_0}$.

לכן $T(z)=\bar{a}c\frac{a-z}{1-\bar{a}z}=\frac{\bar{a}}{|a|}e^{i\theta_0}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$

אזי שוב $\left|\frac{a}{|a|}\right|=1$ ובמקרה שוב אפשר לבחור באלפא θ

$$\Rightarrow T(z)=e^{i\theta_1}\frac{a-z}{1-\bar{a}z},\ \theta_1\in[0,2\pi),\ |a|<1$$

וזו טרנס' מביוס הכללית ביותר של $B(0,1)$ על עצמו.

ב) מצאו את טרנס' מביוס הכללית ביותר שמעתיקה את חצי המישור הימני על עיגול היחידה $B(0,1)$.

<u>תשובה:</u> נסמן את חצי המישור הימני ע"י M.

ניקח $a\in M$ ונדרוש $T(a)=0,\ T(a^*)=\infty$.

0 נק' שפה של M שעוברת לשפת העיגול - $T(0)=e^{i\theta}$

$\theta\in[0,2\pi)$

$$\Rightarrow T(z)=c\frac{z-a}{z-a^*},\ e^{i\theta}=T(0)=c\frac{a}{a^*}\Rightarrow c=\frac{a^*}{a}e^{i\theta}$$

במקרה שלנו, אם $a=\alpha+i\beta$ אזי $a^*=-\alpha+i\beta=-\bar{a}$ וכן $\left|\frac{a}{a^*}\right|=1$

$\Leftarrow$ $c=\frac{a^*}{a}e^{i\theta}$ היא על מעגל היחידה

נסמן $c=e^{i\theta_1}$.

$$\Leftarrow\quad T(z)=c\frac{z-a}{z-a^*}=e^{i\theta_1}\frac{z-a}{z+\bar{a}}$$

מקרה פרט' ופשוט מהשיעור הקודם הוא $T(z)=\frac{1-z}{1+z}$.

הבעיה המרכזית של ההעתקות הקונפורמיות

אם M_1, M_2 שני תחומים ב-$\mathbb{C}$, מצא העתקה קונפורמית וחח"ע ועל $f: M_1 \to M_2$.

טופולוגיה
אפשר למצוא כזה רק אם M_1, M_2 הומיאומורפיים.

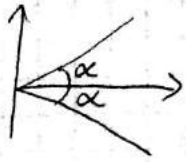
בעיה ראשונה בתחום זה היא כאשר M_1, M_2 פשוטי קשר.

בפירוט - אם M תחום פשוט קשר ב-$\mathbb{C}$, מצא $f: M \to B(0,1)$ כך ש-f קונפורמית (אנליטית ו-$f' \neq 0$) וחח"ע ועל.

<u>הערה:</u> אם $M=\mathbb{C}$, <u>לא ניתן</u> לבנות $f: \mathbb{C} \to B(0,1)$ אנליטית ועל, כי אז f שלמה וחסומה $\Rightarrow$ (ליוביל) קבועה (ולא על!)

אבל אם $M \neq \mathbb{C}$ ופשוט קשר אזי <u>משפט ההעתקה של רימן</u> אומר שקיימת $f: M \to B(0,1)$ קונפורמית, חח"ע ועל.

<u>דוג' פשוטות</u>



① M = גזרה

$M=\{z\in\mathbb{C}, -\alpha < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$

$0<\alpha<\pi$

נגדיר $z_1 = z^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ בענף העיקרי שלה.

באופן כללי אם $z=|z|e^{i\operatorname{Arg}z}$ אזי $z^k = |z|^k e^{ik\operatorname{Arg}z}$

אבל, אם z נק' שפה של M, אזי

$$z=|z|e^{i(\pm\alpha)} \Rightarrow z^{\frac{\pi}{2\alpha}} = |z|^{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{i(\pm\alpha)\frac{\pi}{2\alpha}} = |z|^{\frac{\pi}{2\alpha}} \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$$

השפה עוברת לציר ה-y ו-M עובר לחצי המישור הימני.

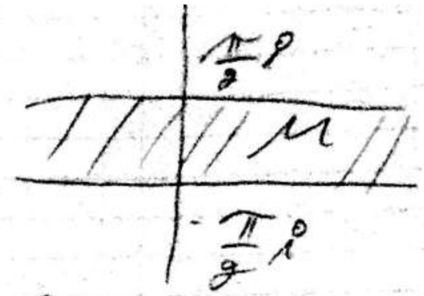
ז"א $z_1 = z^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ מעתיקה את M על חצי המישור הימני.

לבסוף, $w=\frac{1-z_1}{1+z_1}$ מעתיקה את חצי המישור הימני על עיגול היחידה.

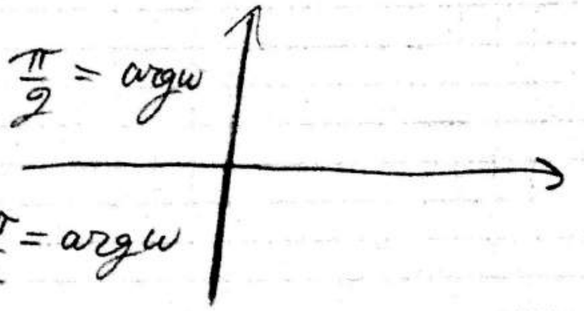
$\Leftarrow$ תשובה סופית: $w=f(z)=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\boxed{\frac{1-z^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{1+z^{\frac{\pi}{2\alpha}}}}$

2

$M=\{z\in\mathbb{C}, -\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}\}$



נעיר שהפונק' $e^z=e^{x+iy}$ מעתיקה את השפה $y=\pm\frac{\pi}{2}$
על קטעים $\{z\in\mathbb{C}, \arg z=\pm\frac{\pi}{2}\}$, שזה בסה"כ הציר המדומה.
<u>הסבר:</u> אם $z=x\pm\frac{\pi}{2}i$ אזי $e^z=e^x e^{\pm\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow$ ממש' חיובי בשפה $=e^x=|e^z|$
$\operatorname{Arg} e^z=\pm\frac{\pi}{2}$
והתמונה של M היא חצי המישור הימני.
$\frac{\pi}{2}=\arg w \Leftarrow f(z)=\frac{1-e^z}{1+e^z}$ מעתיקה את M
על $B(0,1)$ באופן חח"ע.



9/1/16

נניח $D\subset\mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ.

צ"ל $T:D\to B(0,1)$ הח"ע, על וקונפורמית.

רימן השתמש של <u>משפט</u>: אם $f(x,y)$ פונק' רציפה מ-γ ל-$\mathbb{R}$ אזי קיימת u רציפה ב-$\bar{D}$ והרמונית ב-D כך ש $u|_{\gamma}=f$.

<u>הוכחת רימן</u>: נבחר $z_0\in D$. הפונק' $f(z)=\log|z-z_0|$ רציפה ב-γ. לפי המשפט הנ"ל יש $u:\bar{D}\to\mathbb{R}$ כך ש-u רציפה ב-$\bar{D}$ וגם $u|_{\gamma}=f=\log|z-z_0|$.

D תחום פשוט קשר לכן יש ל-u פונק' הרמונית צמודה v כך ש $u+iv$ אנליטית ב-D.

לבסוף נגדיר $g(z-z_0)=z-z_0e^{-u+iv}$.

פשוט ש-g אנליטית ב-D. על γ מתקיים

$$|g(z)|=|z-z_0||e^{-u-iv}|=|z-z_0|e^{-u}=|z-z_0|e^{-\log|z-z_0|}=1$$

g אנליטית ב-D ומעתיקה את שפת γ לשפה $C(0,1)$.

לפי ע' עקרון הארגומנט, לכל $w_0\in B(0,1)$, הערך w_0 מתקבל ע"י g ב-D $\text{Ind}_{g(\gamma)}(w_0)$ פעמים כולל ריבוי.

מכיוון ש $g(\gamma)$ מסתובבת על מעגל היחידה, המספר $\text{Ind}_{g(\gamma)}(w_0)$ שווה עבור כל $w_0\in B(0,1)$. אם נבחר $w_0=0$, הרי ש-$(g(z)=(z-z_0)e^{-(u+iv)})$ מקבלת את הערך אפס רק פעם אחת עבור $z=z_0$.

$\Leftarrow$ $\text{Ind}_{g(\gamma)}(0)=1$ ומשולכי לכל $w_0\in B(0,1)$, $1=\text{Ind}_{g(\gamma)}(0)=\text{Ind}_{g(\gamma)}(w_0)$ וכל $w_0\in B(0,1)$ מתקבל ע"י g פעם אחת בדיוק. לכן g חח"ע ועל.

משיין

מרוכבות שיעור חזרה

ליאור פולק

3.7.2016

אינטגרלים אינסופיים לא אמיתיים- בשנים הקודמות צריך להראות את כל הדרך. בשנה הזאת שמחה מקל- אפשר להראות תשובה סופית לפי מה שנלמד בכיתה אבל להיזהר כי אם התשובה לא נכונה- ירד הכל...

תרגיל: ל-$f(z)$ יש סינגולריות מבודדת ב-z_0. צ"ל $Res(f', z_0) = 0$.

הוכחה: אפשר עם משפט השארית- $\oint f'(z)dz = 2\pi i(Res())$ ולזכור של-f' יש פונקציה קדומה בתחום.

תרגיל: D עיגול היחידה. נניח $f(z)$ מוגדרת ואנליטית ב-$\bar{D}$, ולכל $z \in \bar{D}$, $f(z) \in D$. הוכיחו של-f יש נקודת שבת אחת $z_0 \in D$ (כך ש-$f(z_0) = z_0$).

הוכחה: נגדיר $g(z) = f(z) - z$. צ"ל ל-g יש בדיוק אפס אחד ב-D. בשפה $|z| = 1$, $|-z| = 1 > |f(z)|$. לפי רושה יש ל-$-z$ ול-$-z + f(z)$ אותו מספר אפסים כולל ריבוי ב-D. ל-$-z$ יש אפס אחד ולכן גם ל-g אפס אחד ב-D.

תרגיל: $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ מצאו תנאי מספיק והכרחי לכך ש-φ מעתיקה את חצי המישור השמאלי H על עצמו.

הוכחה: נגדיר $f(-1) = \alpha \in H$. לפי סימטריה, $-\overline{f(1)} = \alpha$. בהכרח $f(0) = iy, y \in \mathbb{R}$. הטרנס' המבוקשת היא אפוא $(w, \alpha, -\bar{\alpha}, iy) = (z, -1, 1, 0)$. נרשום

$$\frac{w-\alpha}{w-iy} \cdot \frac{-\bar{\alpha}-iy}{-\bar{\alpha}-\alpha} = \frac{z+1}{z-0} \cdot \frac{1}{2}$$

דרך של שמחה: שאלה אחרת- להעתיק את החצי העליון על החצי העליון, ואז נתקן בסיבוב של תשעים מעלות. ניקח $\mathbb{R} \ni (\alpha, \beta, \gamma) \leftarrow (0, 1, \infty)$. אזי $w = \frac{z-\alpha}{z-\gamma}\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$. לכן נקבל שכל המקדמים ממשיים. דרישה אחרת- $Im(\frac{ai+b}{ci+d}) > 0$, וזאת משום ש-$i$ עובר לחצי המישור העליון.

לסיום, מה שצריך לעשות הוא להעתיק את השמאלי לעליון, לבצע את ההעתקה הכללית שלנו, ואז את העליון לשמאלי. נרשום $z \to -iz \to \frac{a(-iz)+b}{c(-iz)+d} \to i\frac{a(-iz)+b}{c(-iz)+d} = \frac{az+bi}{-icz+d}$ כאשר כל המספרים a, b, c, d ממשיים. שימו לב- i מסובב נגד כיוון השעון בתשעים מעלות, ו-$-i$- עם כיוון השעון בתשעים מעלות.

תרגיל: $\oint \bar{z}dz \neq 0$. נוכיח עם גרין- $\int_\gamma (x-iy)(dx+idy) = \int xdx+ydy+i\int xdy - ydx = \iint \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}dxdy + i\iint \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}dxdy = 2i \cdot m(D)$.

תרגיל: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2-4x+8}dx$. סינגולריות נמצאת כאשר $z=2\pm 2i$ כאשר ניקח רק את הפלוס שנמצא בחצי העליון. לכן האינטגרל הוא $Re(2\pi i\cdot Res(\frac{\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2-4x+8},2+2i))$. זה קוטב מסדר ראשון שאנו יודעים למצוא.

תרגיל: מצאו את כל הפונקציות השלמות כך ש-$|f(z)|\leq M(1+|z|)^{\frac{4}{5}}$ ($M>0$ קבוע) לכל $z\in\mathbb{C}$.

פתרון: ניקח $z_0\in\mathbb{C}$ כלשהי. לפי קושי

$$|f'(z_0)|=|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(0,R)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz|\leq\frac{1}{2\pi}ML\leq\frac{M(1+R)^{\frac{4}{5}}}{(R-|z_0|)^2}\cdot 2\pi R$$

אבל f שלמה ולכן נשאיף $R\to\infty$. נקבל ש-$|f'(z_0)|\leq 0$ דהיינו $f'(z)=0$ ואלו הן כל הפונקציות הקבועות!

תרגיל: לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$. עבור $R>0$ נתון, הוכיחו שיש $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$ אזי $P_n(z)\neq 0$ ב-$B(0,R)$.

תשובה: כידוע $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(z)=e^z$ עם התכנסות במ"ש ב-$\overline{B(0,R)}$. זוהי פונקציה שאיננה מתאפסת ב-$\mathbb{C}$. e^z מקבל מינימום (לפי ויירשטראס) ϵ בכדור הסגור $\overline{B(0,R)}$. כיוון ש-$P_n(z)\to e^z$ במ"ש ב-$\overline{B(0,R)}$ יש n_0 מסויים כך שאם $n>n_0$ אזי $|P_n(z)-e^z|<\epsilon$. נובע שאם $n>n_0$ ואם $z\in\overline{B(0,R)}$ אזי לא ייתכן כי $P_n(z)=0$ כי אז $|P_n(z)-e^z|=|e^z|>\epsilon$ אבל זה סותר את הבנייה $|P_n(z)-e^z|<\epsilon$ ומש"ל.

אם נשתמש ברושה- בשפה $C(0,R)$ נקבל $|P_n(z)-e^z|<\epsilon$ מהתכנסות במ"ש (אותו אפסילון של התכנסות במ"ש). נקבל של-e^z ול-$(P_n(z)-e^z)+e^z$ יש אותו מספר אפסים ב-$\overline{B(0,R)}$.

תרגיל: נניח $\{f_n\}$ ו-f פונקציות אנליטיות ב-$\overline{B(0,R)}$. נניח ש-$f_n\to f$ במ"ש ב-$C(0,R)$. הוכח התכנסות במ"ש ב-$\overline{B(0,R)}$.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$ נתון. $f_n\to f$ במ"ש בשפה ולכן קיים n_0 כך שאם $n>n_0$ וגם $z\in C(0,R)$ אזי $|f_n(z)-f(z)|<\epsilon$. לפי עקרון המקסימום אם $n>n_0$ ואם $z\in B(0,R)$ הרי ש-$|f_n(z)-f(z)|\leq\max\limits_{z\in C(0,R)}|f_n(z)-f(z)|<\epsilon$ ומש"ל.