משוואות דיפרנציאליות רגילות – שיטות ומושגים

משוואות מסדר ראשון

<table>
<tr>
<td>ליניאריות
$y' = p(x)y$
$y' = Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$</td>
<td colspan="2">ניתנות להפרדה
$y' = f(x)g(y)$
$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
$z := \frac{y}{x}$
$z' = \frac{f(z) - z}{x}$</td>
<td colspan="2">$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$
$z := ax + by \Rightarrow$
$z' = a + by'$</td>
<td>$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$
$\begin{cases} x := u + \alpha \\ y := v + \beta \end{cases}$
כך ש-c, C מתאפסים
$z := \frac{v}{u} \Rightarrow$
$v' = z + uv'$</td>
</tr>
<tr>
<td>ברנולי
$y' = a(x)y + b(x)y^{k+1}$
$z := y^{-k} \Rightarrow$
$z' = -ky^{-k-1}y'$</td>
<td>ריקאטי
$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$
בהנתן פתרון y_0
$y := y_0 + \frac{1}{z}$</td>
<td>קלרו
$y = xy' + f(y')$
קווים ישרים
$y = \alpha x + f(\alpha)$
פתרון סינגולרי
$x + f'(y') = 0$</td>
</tr>
</table>

<u>מהומוגנית לאי הומוגנית</u>

- **כללי אי-הומוגני = כללי הומוגני + פרטי אי-הומוגני**
- **וריאציית מקדמים**

  לאחר שפותרים את ההומוגנית הקשורה מקבלים פתרון עם קבועים C_i.

  מציבים במקום $C_i(x)$, מציבים במשוואה ומוצאים את הביטויים.
- **גורם אינטגרציה**

  הכפלת מחובר בשני האגפים שהופך את אחד מהם לנגזרת של מכפלה.

  עבור ליניארית $y' + p(x)y = q(x)$ גורם האינטגרציה הוא $I(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

משוואות מסדר שני

לינארית	בלי תלות ב-x
$y''+a(x)y'+b(x)y=0$ בהנתן פתרון y_1, נפתור משוואה מסדר ראשון $W(x)=y_1y_2'-y_2y_1{}'$	$p\coloneqq y'\Rightarrow pp'=y''$

משוואות מסדר גבוה

כללי

$$y^{(n)}=a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(x)y$$

(הורדת סדר) בהנתן פתרון y_0	בהנתן פתרונות בת"ל $y_1,\dots,y_n$
$y\coloneqq zy_0$	פתרון כללי הוא צ"ל

המרה למערכת משוואות

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}'=y_n \\ y_n'=a_1(x)y_1+\cdots+a_{n-1}(x)y_n(x) \end{cases}$$

עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)}=a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y$$

נמצא את שורשי הפולינום האופייני לפי האופרטור $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, יהי λ שורש מריבוי אלגברי m

$\alpha\pm\beta i=\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}$	$\lambda\in\mathbb{R}$
$y=e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x,\dots$ $,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y=e^{\lambda x},\dots,x^{m-1}e^{\lambda x}$

מהומוגנית לאי-הומוגנית

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y + b(x)$$

- **כללי אי-הומוגני** = **כללי הומוגני** + **פרטי אי-הומוגני**
- **וריאציית מקדמים**

  בהנתן פתרונות $y_1, \dots y_n$ להומוגנית הקשורה

  $y = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n$ פתרון לאי-הומוגנית כאשר

  $$\mathrm{W}(x)\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$$

- **שיטת המשמיד**

  הפעלת אופרטור על שני אגפי המשוואה, שמאפס את החלק האי-הומוגני

  $b(x) = x^m \Rightarrow M = D^{m+1}$

  $b(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow M = D - \lambda$

  $b(x) = \cos \omega x\,, \sin \omega x \Rightarrow M = D^2 + \omega^2$

- **פונקציית גרין**

  כאשר L אופרטור דיפרנציאלי, נרצה לפתור $L[y] = b(x) \Rightarrow y = L^{-1}[b(x)]$

  $$y = L^{-1}[b] = \int G(x,t)b(t)\mathrm{d}t$$

מושגים

הגדרת הוורונסקיאן:

$$\mathrm{W}(x) \coloneqq \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

משפט אבל:

$$\mathrm{W}(x) = \mathrm{W}(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\mathrm{d}t}$$

פונקציית גרין:

$$G(x,t) \coloneqq \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{\underbrace{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}_{=\mathrm{W}_{y_1,y_2}(t)}}$$

משוואות מסדר גבוה

2 משוואות

בהנתן פתרון y_1, נפתור משוואה מסדר ראשון

$$Y(x)=y_1y_2'-y_2y_1'$$

כללי

$$y^{(n)}=a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(x)y$$

בהנתן פתרונות בת"ל $y_1,\dots,y_n$ פתרון כללי הוא צ"ל

(הורדת סדר) בהנתן פתרון y_0

$$y:=zy_0$$

עם מקדמים קבועים – שיטה א'

$$y'=Ay$$

נמצא את הערכים העצמיים של A, יהי λ ערך עצמי מריבוי אלגברי m:

$\lambda\in\mathbb{R}$

$$z:=e^{\lambda x}$$

$\alpha\pm\beta i=\lambda_{1,2}\in\mathbb{C}$

$$z:=e^{\alpha x}\cos\beta x\,,e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי

יהי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של וקטורים עצמיים המתאימים ל-λ

$$y=v_1z+\cdots+v_nz$$

ריבוי אלגברי > ריבוי גיאומטרי

$$y=\begin{pmatrix}p_1(x)\\ \vdots\\ p_m(x)\end{pmatrix}z$$

נחפש פולינומים מדרגה $m-1$ ע"י הצבה במשוואה

עם מקדמים קבועים – שיטה ב'

$$y'=Ay$$

נמצא את צורת ז'ורדן של A, נפתור כל בלוק בנפרד.

יהי λ ערך עצמי ובלוק מתאים בגודל m

נפתור את הבלוק שורה-שורה, נקבל

$$y=e^{\lambda x}\left(C_1\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+C_m\begin{pmatrix}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

עם מקדמים קבועים – שיטה ג'

$$y'=Ay$$

$$y=Ce^{Ax}$$

מעבר מהומוגנית לאי-הומוגנית

$$\begin{cases} y_1' = a_1(x)y_1 + \cdots + a_n(x)y_n + b_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_1(x)y_1 + \cdots + a_n(x)y_n + b_1(x) \end{cases} \Leftrightarrow y' = A(x)y + b(x)$$

- **כללי אי-הומוגני** = **כללי הומוגני** + **פרטי אי-הומוגני**
- **וריאציית מקדמים**

  בהנתן פתרונות $y_1, \dots y_n$ להומוגנית הקשורה

  $y = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n$ פתרון לאי-הומוגנית כאשר

  $$\mathrm{Y}(x)\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = b(x)$$

- **שיטת המשמיד** (בעמ' הקודם)

מושגים

הגדרת הפתרון היסודי:

$$\mathrm{Y}(x) \coloneqq \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1 & \cdots & y_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

משפט ליוביל-אוסטרוגרדסקי:

$$\Delta(x) = \Delta(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}(A)\mathrm{d}t}$$

$$\Delta(x) = \det \mathrm{Y}(x)$$

אקספוננט מטריציוני:

$$e^A \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \cdots \\ 0 & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & \frac{1}{0!} \end{pmatrix}$$

משוואות עם מקדמים אנליטיים (מסדר שני)

<table>
<tr>
<td>

כללי

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

$P(x), Q(x)$ אנליטיים

קיים פתרון $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

מציבים במשוואה ומוצאים תלות רקורסיבית בין המקדמים, הראשונים נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה

</td>
<td>

לז'נדר

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + Cy = 0$

כאשר $k \in \mathbb{Z}$, $C = k(k+1)$, קיים פתרון שהוא פולינום ממעלה k, $y = P_k$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

אוילר

$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$

מציבים $y = x^\alpha$ ופותרים את משוואת האינדקס (ריבועית), יהיו $\alpha_{1,2}$ שורשים

$\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $y = C_1x^{\alpha_1} + C_2x^{\alpha_2}$	$\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $y = C_1x^\alpha + C_2x^\alpha \log x$	$\beta \pm \omega i = \alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$ $y = x^\beta(C_1\cos(\omega \log x) + C_2\sin(\omega \log x))$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

שיטת פרוביניוס

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

כאשר x_0 נקודה סינגולרית-רגולרית

קיים פתרון בסביבת x_0 שהוא מהצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

(א) כדי למצוא את α, מציבים את הטור ופותרים את משוואת האינדקס, בהנחה ש- $a_0 \neq 0$ (השוואת המקדמים של החזקה הנמוכה ביותר של x ל-0).

אם $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, הפתרונות מתלכדים

</td>
<td>

(ב) כדי למצוא את המקדמים עבור α כלשהו, מציבים את הטור ומוצאים תלות רקורסיבית, הראשונים נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה.

אם נמצא רק אחד y_1 $(\alpha_1 > \alpha_2)$, השני הוא $y_2 = b\log x \cdot y_1 + \sum b_n x^{n+\alpha_2}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

משוואת בסל

$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

(0 נקי' סינגולרית-רגולרית), נחפש פתרון בעזרת שיטת פרוביניוס

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\nu \notin \mathbb{Z}$

$y = J_{-\nu}, J_\nu$ (הפתרונות בת"ל,

אפילו אם $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, אחרת הם מתלכדים)

</td>
<td>

$\nu \in \mathbb{Z}$

$y = J_\nu, Y_\nu$

(או, לאחר מציאת הפתרון הראשון, לעשות הורדת סדר ולמצוא את השני)

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

התמרת לפלס

הפעלת התמרת לפלס על שני אפי המשוואה, פתירת המשוואה עם ההתמרה, ביצוע התמרה הפוכה על הפתרון

</td>
</tr>
</table>

מושגים

סיווג נקודות:

אורדינרית	אם P, Q אנליטיות בסביבת x_0
סינגולרית-רגולרית	אחרת, אם $(x-x_0)P, (x-x_0)^2 Q$ אנליטיות בסביבת x_0
סינגולרית-לא רגולרית	אחרת

פונקציית גמא:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

$$\prod_{j=1}^{k}(nj-m)=\frac{n^k\Gamma\left(k+\frac{n-m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)}$$

פונקציות בסל:

$$\boxed{J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}$$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

$$\boxed{Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\pi\nu)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi-\nu)}}$$

פונקציה יוצרת:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n=e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

$$J_n(x)+J_{n+2}(x)=\frac{2(n+1)}{x}J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$$

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

פולינום לז'נדר:

$$\boxed{P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^k}$$

פונקציה יוצרת:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)t^k=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

התמרת לפלס:

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

שונות

משפט קיום ויחידות לבעיית קושי – משוואה אחת מסדר ראשון:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f רציפה בתחום $D = \{|x - x_0| \le \alpha, |y - y_0| \le \beta\}$

ומקיימת את תנאי ליפשיץ בתחום, כלומר לכל $x, y_1, y_2 \in D$

מתקיים $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$

אזי קיים פתרון יחיד בתחום $|x - x_0| \le \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{\sup|f|}\right\}$

איטרציית פיקארד:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = y_0 \\ \varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, \varphi_n(s)\big) \mathrm{d}s \end{cases}$$

מטריצות 2x2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}A \cdot x + \det A$$

כלל קרמר:

$$Ax = b$$

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

כאשר A_k המטריצה המתקבלת ע"י החלפת העמודה ה-k

במטריצה A ב-b