פתרון תרגיל 6 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

4 במאי 2016

1. נשים לב שמתקיים (לכל פרמטריזציה r):

$$G=\begin{pmatrix} r_u\cdot r_u & r_u\cdot r_v \\ r_u\cdot r_v & r_v\cdot r_v \end{pmatrix}=J_r^t\cdot J_r$$

כאשר J היא היעקוביאן של r. אם כן, לפי כלל השרשרת:

$$J_{\tilde{r}}=J_r(f)\cdot J_f$$

ולכן:

$$\widetilde{G}=J_{\tilde{r}}^t\cdot J_{\tilde{r}}=\left(J_r(f)\cdot J_f\right)^t\cdot J_r(f)\cdot J_f=J_f^t\cdot J_r(f)^t\cdot J_r(f)\cdot J_f=J_f^tGJ_f$$

ובסה"כ:

$$\widetilde{G}\left(x,y\right)=J_f^t\left(x,y\right)G\left(f\left(x,y\right)\right)J_f\left(x,y\right)$$

2. תהי $p\in S^2\backslash\left\{N\right\}$ נקודה על הספירה שאינה הקוטב הצפוני.
היישר Np מוגדר על ידי:

$$Np=\left\{\left(1-t\right)N+pt:t\geq 0\right\}$$

אם נסמן $p=\left(x,y,z\right)$ ונזכור ש: $N=\left(0,0,1\right)$, נקבל:

$$Np=\left\{\left(tx,ty,1-t+tz\right)|t\geq 0\right\}$$

נקודת החיתוך עם המישור xy מקיימת: $1-t+tz=0$, כלומר: $t=\frac{1}{1-z}$.
לכן, הנקודה היא: $\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)$, ולכן ההטלה הסטריאוגרפית מוגדרת כך:

$$F\left(x,y,z\right)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)$$

3. נחשב את המטריקה G. וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (0,0,1)\,, r_s = \left(\left(\gamma^1(s)\right)', \left(\gamma^2(s)\right)', 0\right)$$

ולכן:

$$g_{22} = r_u \cdot r_u = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_s = 0$$

$$g_{11} = r_s \cdot r_s = \|\gamma'(s)\|^2$$

ולכן אם נבחר פרמטריזציה טבעית (שבה $\|\gamma'(s)\| = 1$) נקבל שאכן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4. נשתמש במטריקה G.

(א) וקטור הנגזרות הוא: $\gamma'(t) = (0,2)$, ולכן האורך הוא:

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(0,2)\|\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם:

$$f_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)\,, f_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

לאחר חישוב מקבלים:

$$G = \begin{pmatrix} \langle f_\theta, f_\theta\rangle & \langle f_\theta, f_\phi\rangle \\ \langle f_\phi, f_\theta\rangle & \langle f_\phi, f_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

לכן, האורך הוא:

$$L(f\circ\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 2t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2t dt =$$

$$= -\cos 2t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 2$$

(ג) וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), r_v = (-(2+\cos u)\sin v, (2+\cos u)\cos v, 0)$$

ולכן:

$$g_{11} = r_u \cdot r_u = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = r_u \cdot r_v = 0$$

$$g_{22} = r_v \cdot r_v = (2+\cos u)^2$$

כלומר $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos u)^2 \end{pmatrix}$.

כעת, נחשב את השטח באמצעות הנוסחה:

$$\iint\limits_{r(D)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{\det G} dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos u)\, dudv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2u+\sin u)|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}}\, dv =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi+1)\, dv = \frac{\pi}{2}(\pi+1)$$

$$\iint\limits_{r(E)} dS = \iint\limits_{E} \sqrt{\det G} dS = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos u)\, dudv = \pi(\pi+1)$$

הטורוס נראה כך: