קצת על שייכות, הכלה וקבוצת חזקה.

קבוצה - אוסף של איברים. מסומנת בעזרת סוגריים מסולסלות.

הסדר בקבוצה לא משנה; למשל, $\{1,2\} = \{2,1\}$.

כמו כן, ריבוי איברים בקבוצה לא משנה; למשל: $\{1,2,3\} = \{1,2,2,3,3,2,3\}$.

איבר שייך לקבוצה; לדוגמה, אם נתבונן בקבוצה $A = \{1,2,3,4\}$, האיבר 1 שייך לקבוצה. כך גם האיברים 2,3,4. שייכות מסמנים כך:

$$1 \in A$$

פירושו 1 שייך לA.

נתבונן בקבוצה הבאה: $B = \{A,2,3,\{1,2\}\}$. איברי הקבוצה הם $A,2,3,\{1,2\}$ ולכן נאמר שהקבוצה A שייכת לקבוצה B, מכיוון ש-A היא איבר של הקבוצה B, ונסמן: $A \in B$.

כעת, נאמר שקבוצה C מוכלת בקבוצה D (ונסמן $C \subseteq D$) אם כל איבר שנמצא ב-C נמצא גם ב-D (כלומר, $x \in C \to x \in D$). למשל, אם נתבונן בקבוצות $C = \{1,2,36\}$ ו-$D = \{1,2,3,4,36,67,y\}$

נקבל שמתקיים $C \subseteq D$. במצב כזה נאמר ש-C היא תת קבוצה של D.

אם נחזור ל-A ול-B שלנו, נקבל ש- $A \nsubseteq B$ מכיוון שהאיבר 1, למשל, שייך ל-A אך לא שייך ל-B.

האם יכול להיווצר מצב שבו $x \in y$ וגם $x \subseteq y$?

התשובה היא כן. למשל, אם נסתכל על הקבוצות $y = \{1,\{1\}\}$ ו- $x = \{1\}$, נקבל ש- $x \subseteq y$ מכיוון שכל איבר ששייך ל-x (במקרה שלנו זה רק 1) שייך גם ל-y; מצד שני, x הוא איבר ב-y ולכן $x \in y$.

קבוצה ריקה - קבוצה חסרת איברים נקראת קבוצה ריקה, ומסומנת ב-ϕ.

האם הקבוצה $\{\phi\}$ ריקה?

לא! זו קבוצה שיש לה איבר ולכן היא לא הקבוצה הריקה. מי הוא האיבר? הקבוצה הריקה.

מהגדרתה של הקבוצה הריקה ϕ כקבוצה חסרת איברים נקבל שלכל קבוצה A מתקיים:

1. $A\cap\phi=\phi$, מכיוון שהחיתוך הוא קבוצת האיברים המשותפים, ואין איברים משותפים לשתי הקבוצות (מכיוון שבקבוצה הריקה אין איברים כלל), נקבל שגם החיתוך הוא קבוצה ריקה.
2. $A\cup\phi=A$.
3. $A\cap A^c=\phi$.

קבוצת החזקה - בהינתן קבוצה A, נסמן ב- $P(A)$ את קבוצת כל תתי הקבוצות של A, כלומר:

$$P(A)=\{B|B\subseteq A\}$$

לדוגמה, נתבונן בקבוצה $A=\{1,2,3\}$. מה היא $P(A)$?

נבין מהן תתי הקבוצות של A. קודם כל, קבוצה ריקה היא תמיד תת קבוצה (לא משנה מה היא הקבוצה, כמו שראינו), ולכן הקבוצה הריקה ϕ תהיה **תמיד** איבר ב-$P(A)$לכל A. בנוסף, במקרה שלנו,

שאר תתי הקבוצות תהיינה:

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$$

ובסה"כ נקבל ש-

$$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

שימו לב! קבוצת החזקה היא קבוצה ולכן נשים סוגריים מסולסלות מסביב לכל תתי הקבוצות.

מה לגבי קבוצת החזקה של קבוצה ריקה, $P(\phi)$?

אמרנו שקבוצה ריקה תמיד תהיה בקבוצת חזקה, לא משנה של איזו קבוצה, לכן ϕ היא **איבר** ב-$P(\phi)$. מאידך גיסא, מכיוון ש-ϕ חסרת איברים היא לא מכילה אף קבוצה אחרת (למה?) ולכן אין עוד קבוצה חוץ מ-ϕ

שהיא תת קבוצה של ϕ ולכן נקבל ש־

$$P(\phi) = \{\phi\}$$

שוב, חשוב שים לב שמדובר על קבוצה שיש בה איבר (שהוא הקבוצה הריקה) ולא על הקבוצה הריקה עצמה.

אפשר לשאול עוד פעם: מה לגבי $P(P(\phi))$?

ראינו ש־$P(\phi) = \{\phi\}$, ולכן $P(P(\phi)) = P(\{\phi\})$. מהן תתי הקבוצות של $P(\{\phi\})$?

קודם כל, מכיוון שקבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה (ובפרט בקבוצה שלנו $\{\phi\}$), קבוצה ריקה תהיה איבר ב־$P(\{\phi\})$. מהן תתי הקבוצות הנוספות של $\{\phi\}$? מכיוון שבקבוצה יש רק איבר אחד,

תת הקבוצה היחידה (חוץ מהקבוצה הריקה) היא הקבוצה עצמה ־ $\{\phi\}$, ולכן בסה"כ נקבל ש־

$$P(P(\phi)) = P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

- בעזרת מה שראינו עד עכשיו, הסיקו ש־

$$P(P(P(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

אם לכל קבוצה A מתקיים $\phi \in P(A)$, אז חיתוך של שתי קבוצות חזקה אף פעם לא יהיה קבוצה ריקה, מכיוון שתמיד יהיה בו לפחות איבר אחד ־ הקבוצה הריקה ϕ. כלומר, לכל שתי קבוצות A, B, מתקיים:

$$P(A) \cap P(B) \supseteq \{\phi\}$$

שימו לב! לכל קבוצה A, A היא תת קבוצה של עצמה, כלומר $A \subseteq A$. לכן, לפי הגדרת קבוצת החזקה, לכל קבוצה A יתקיים $A \in P(A)$.

האם יכול להיות ש־$x \in A$ וגם $x \in P(A)$?

התשובה היא כן. קבוצה ריקה, למשל, היא איבר ב־$\{\phi\}$ וגם איבר ב־$P(\{\phi\})$.דוגמה נוספת: אם נתבונן בקבוצה $C = \{1, \{1\}\}$, נקבל ש־$P(C) = \{\phi, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$, ולכן $\{1\} \in C$ וגם $\{1\} \in P(C)$.