

(88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ז מועד א'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה של מספרים ממשיים. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

1. הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

2. לכל פונקציה חד־חד ערכית ועל $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, הסידרה $(a_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

2 \Leftarrow 1: בפרט ניקח את תמורת הזהות, $\sigma(n) = n$ ונקבל $a_{\sigma(n)} = a_n$ מתכנס

1 \Leftarrow 2: יהי $\epsilon > 0$, מהנתון קיים N' כך שלכל $n \geq N'$ מתקיים $|a_n - a| \leq \epsilon$

כעת נבחר N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים כי $\sigma(n) \geq N'$ (זה אפשרי היות ויש מס' סופי של אינדקסים קטנים מ' N')

לכל $n \geq N$ מתקיים $\sigma(n) \geq N'$ ובפרט $|a_{\sigma(n)} - a| \leq \epsilon$ וסיימנו.

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

- א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{\ln(n+1)}$
ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n^2}{n^{5/4}}$
ג. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$

סעיף א

ננסה התכנסות בהחלט, נסמן $a_n := \frac{|\cos(\frac{\pi n}{6})|}{|\ln(n+1)|}$ וברור כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n)}{\ln(12n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(12n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ננסה התכנסות בתנאי, בעזרת דיריכלה קל להראות כי $\frac{1}{\ln(n+1)} \searrow 0$ וכן $\sum \cos(\frac{\pi n}{6})$ חסום בגלל המחזוריות של \cos ביחס ל- π .
לכן **מתכנס בתנאי**.

סעיף ב

נראה התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^{5/4}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n^2)|}{n^{5/4}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < \infty$$

ולכן הטור שלנו **מתכנס בהחלט**.

סעיף ג

ננסה מבחן השורש על טור הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{(n!)^3}} = \frac{3^{\frac{n^2}{n}}}{\sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{n!}} = \frac{3^n}{\sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n]{n!}} \geq \frac{3^n}{\sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{n^n}} = \frac{3^n}{n^3} \rightarrow \infty$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שלפי מבחן המנה $3 > 1$ $\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \rightarrow 3 > 1$

$$\infty \leftarrow \left(\frac{3^n}{n^3}\right)^n = \frac{3^{n^2}}{(n^n)^3} \leq \frac{3^{n^2}}{(n!)^3}$$

ולפי משפט הסנדוויץ' לאינסוף, $\frac{3^{n^2}}{(n!)^3} \rightarrow \infty$ ובפרט $\frac{3^{n^2}}{(n!)^3} \not\rightarrow 0$ ולכן **מתבודר**.

שאלה 3

הוכח, בעזרת ניסוח ϵ - δ , את הטענה $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$.

יהי $\epsilon > 0$ נמצא $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0 \wedge x \neq 1\} = \text{dom}(f)$ המקיים $|x-1| < \delta$ כי $|f(x) - \frac{1}{2}| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \frac{2 - (\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)} \right| = \left| \frac{-\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}+1)} \right| = \left| \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}+1)} \right| = \left| \frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \right| \\ &< \frac{\delta}{|2x+4\sqrt{x}+2|} \leq \frac{\delta}{2} (= \epsilon) \end{aligned}$$

לכן אם נבחר $\delta := 2\epsilon$ נקבל הדרוש

שאלה 4

תהי f פונקציה המוגדרת בכל הישר הממשי, ומקיימת $f(a+b) = f(a) + f(b)$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$. נתון גם שהפונקציה f רציפה בנקודה 0. הוכח:

א. $f(0) = 0$.

ב. הפונקציה f רציפה בכל הישר הממשי.

ג. הפונקציה f רציפה במידה שווה ב \mathbb{R} .

סעיף א

ניקח לפי הנתון $a = 0, b = 0$

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

ואז

$$2f(0) = f(0)$$

ולכן

$$f(0) = 0$$

סעיף ב

נחשב ונראה כי לכל $a \in \mathbb{R}$ כי $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ (אחד הניסוחים השקולים)

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + f(h)) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h)$$

אבל מרציפות בנק' 0 מתקיים $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$ ולכן

$$= f(a) + f(0) = f(a) + 0 = f(a)$$

סעיף ג

יהיו $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ כך ש $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ נראה כי $|f(a_n) - f(b_n)| \rightarrow 0$

אבל זה ברור משום ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) - f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n - b_n)$$

ומרציפות נובע כי

$$f(a_n - b_n) \rightarrow f(0) = 0$$

ולכן סיימנו.

שאלה 5

הוכח את משפט קנטור, האומר שכל פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה במידה שווה בקטע זה.

הוכחה תהי f רציפה בקטע $[a, b]$, נניח בשלילה ש f אינה רציפה במידה שווה שם. כלומר יש בקטע סדרות $(a_n), (b_n)$ כך ש $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ אבל $|f(a_n) - f(b_n)| \not\rightarrow 0$. ניקח $\epsilon > 0$ כך שלאינסוף ערכי n מתקיים $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon$, נמספר ערכים אלה כסדרה עולה $m_1 < m_2 < \dots$ ונקבל ת"ס a_{m_n}, b_{m_n} כך ש $|f(a_{m_n}) - f(b_{m_n})| \geq \epsilon$ לכל n למרות ש $|a_{m_n} - b_{m_n}| \rightarrow 0$. נסמן $c_n := a_{m_n}, d_n := b_{m_n}$. תהי c_{k_n} ת"ס של a_{m_n} מתכנסת, כלומר $c_{k_n} \rightarrow c$ (לכל סדרה חסומה, במקרה שלנו a, b , קיימת תת סדרה מתכנסת) f רציפה בקטע הסגור ולכן מתקיים $f(c_{k_n}) \rightarrow f(c)$. כעת ניקח תת סדרה מתאימה מבחינת האינקסים של d_n , נקרא לה d_{k_n} מתקיים כי $|c_{k_n} - d_{k_n}| \rightarrow 0$ (הרי זו ת"ס של $a_n - b_n$), וכן $d_{k_n} = c_{k_n} - (c_{k_n} - d_{k_n}) \rightarrow c - 0 = c$ ואז $f(d_{k_n}) \rightarrow f(c)$ ואז $f(c_{k_n}) - f(d_{k_n}) \rightarrow f(c) - f(c) = 0$ בסתירה. $\epsilon \leq |f(c_{k_n}) - f(d_{k_n})|$