<u>תרגיל</u>

הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול במונחי אפסילון-דלטא כי: $\lim_{x\to 1}\frac{6x-5}{2x-1}=1$.

<u>טיוטה:</u>

נתון לנו $\epsilon>0$ ואנחנו צריכים למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אז $\left|\frac{6x-5}{2x-1}-1\right|<\epsilon$. נפשט ביטוי זה כדי למצוא בו את $|x-1|$:

$$\left|\frac{6x-5}{2x-1}-1\right|=\left|\frac{4x-4}{2x-1}\right|=\frac{4|x-1|}{|2x-1|}<\epsilon$$

כלומר נרצה לחסום את $\frac{4}{|2x-1|}$.

<u>נסיון ראשון:</u> $|x-1|<\delta$ לכן אם $\delta\le 1$ אז בפרט $|x-1|<1$ כלומר $-1<x-1<1$ כלומר (נכפול ב-2): $-2<2x-2<2$ כלומר (נוסיף 1): $-1<2x-1<3$. כעת נרצה להסיק משהו על ההפכי של ביטוי זה, כלומר על $\frac{1}{2x-1}$, וכאן אנחנו נתקלים בבעיה, כי אם כל מה שאנחנו יודעים זה שהמכנה הוא בין -1 ל- 3 אז לא נוכל להסיק כלום על השבר כולו (יתכן והוא גדל לאינסוף ולא חסום, כי כאשר המכנה קרוב ל-0 השבר כולו גדול). לכן כדאי לנסות לחפש $\delta>0$ קטן יותר כדי שנקבל ש- $2x-1$ נמצא בין שני ביטויים חיוביים או בין שני ביטויים שליליים, כדי שגם ההפכי שלו יהיה חסום.

<u>נסיון שני:</u> נבחר $\delta=\frac{1}{10}$. אכן, עבור כל $\delta\le\frac{1}{10}$ נקבל: $|x-1|<\frac{1}{10}$ כלומר $\frac{-1}{10}<x-1<\frac{1}{10}$ כלומר (נכפול ב-2): $\frac{-1}{5}<2x-2<\frac{1}{5}$ כלומר (נוסיף 1): $\frac{4}{5}<2x-1<\frac{6}{5}$. לכן (נקח את ההפכי של כל הביטויים ונהפוך את סימן האי-שוויון) $\frac{5}{4}>\frac{1}{2x-1}>\frac{5}{6}$ ולכן (נכפול ב-4): $\frac{10}{3}>\frac{4}{2x-1}>5$. בפרט $\left|\frac{4}{2x-1}\right|<5$ וזה החסם שחיפשנו. לכן נוכל לבחור כל $\delta>0$ המקיים $\delta\le\frac{\epsilon}{5}$ אשר גם מקיים $\delta\le\frac{1}{10}$, למשל נבחר $\delta=min(\frac{\epsilon}{5},\frac{1}{10})$.

<u>ההוכחה עצמה:</u> יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=min(\frac{\epsilon}{5},\frac{1}{10})$. אז אם x מקיים $0<|x-1|<\delta$ נקבל כי:

$$|f(x)-L|=...=|x-1|\cdot\frac{4}{|2x-1|}<\delta\cdot 5\le\frac{\epsilon}{5}\cdot 5=\epsilon$$

מש"ל.