סדרת קבוצות $(E_n)_{\mathbb{N}}$

<u>הגדרה:</u>

$$\overline{\lim}\, E_n = \limsup E_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\le k} E_k$$

$$\underline{\lim}\, E_n = \liminf E_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\le k} E_k$$

<u>טענה:</u> הוכחו:

(1) $\overline{\lim}\, E_n = \{x \mid \{n \mid x\in E_n\}$ אינסופית$\}$

(2) $\underline{\lim}\, E_n = \{x \mid \{n \mid x\notin E_n\}$ סופית$\}$

<u>הוכחה:</u>

(1) $x \in \overline{\lim}\, E_n \iff x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\le k} E_k$

$\iff \forall n\in\mathbb{N} : \exists k\ge n : x\in E_k$

$\iff \{n \mid x\in E_n\}$ אינסופית.

(2) $x \in \underline{\lim}\, E_n \iff x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\le k} E_k$

$\iff \exists n\in\mathbb{N} : \forall k\ge n \quad x\in E_k$

$\iff \exists n\in\mathbb{N} : [x\notin E_k \Rightarrow k<n]$

$\iff \{n \mid x\notin E_n\}$ סופית

<u>הערה:</u> קל לראות כי מתקיים תמיד:

$$\bigcap_{\mathbb{N}} E_n \subseteq \underline{\lim}\, E_n \subseteq \overline{\lim}\, E_n \subseteq \bigcup_{\mathbb{N}} E_n$$

ולא תמיד $\underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, E_n$

לדוגמא: נגדיר $A=\{1,2,3\}$

$B=\{2,3,4\}$

$C=\{3,4,5\}$

ואכן נגדיר את הסדרה $(E_n)_{\mathbb{N}}$ באופן הבא:

$E_1 = C$

ולכל $n\ge 1$: $E_{2n} = A$

$E_{2n+1} = B$

אז:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigcap E_n & & \underline{\lim}\, E_n & & \overline{\lim}\, E_n & & \bigcup E_n \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
A\cap B\cap C & \subset & A\cap B & \subset & A\cup B & \subset & A\cup B\cup C \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
\{3\} & & \{2,3\} & & \{1,2,3,4\} & & \{1,2,3,4,5\}
\end{array}$$

<u>תרגיל:</u> תהי $\{f_n\}_n$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0,1]$
הוכח כי הקבוצה
$\{x \mid f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\} \in \mathcal{S}$ (כלומר מדידה-בורל ב-$\mathbb{R}$)

<u>הוכחה:</u> לכל $\varepsilon>0$ נגדיר את סדרת הקבוצות הבאות:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad E_n^\varepsilon := \{x \mid f_n(x) < \varepsilon\}$$

כעת:

$$x\in\{x \mid f_n(x)\to 0\}$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N} : \forall k\geq n \quad x\in E_k^\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \text{סופית } \{n \mid x\notin E_n^\varepsilon\}$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad x\in\underline{\lim}\, E_n^\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n} E_k^\varepsilon$$

כעת, ניתן לראות כי לכל n ולכל $\varepsilon>0$ הקבוצה E_n^ε פתוחה ב-$\mathbb{R}$, ולכן (לפי השיעור הקודם) ניתנת להצגה כאיחוד <u>מני</u> זר של קטעים פתוחים, ומכאן שהיא מדידה. (כיון ש-$\mathcal{S}$ היא σ אלגברה וכל קטע הוא "נחמד" ב-$\mathbb{R}$).
מכאן שגם $\underline{\lim}\, E_n^\varepsilon$ מדידה (שוב: σ אלגברה ($\mathcal{S}$) סגורה לגבי החיתוך והאיחוד <u>מני</u>)

די להוכיח כי: $\bigcap_{\varepsilon>0}\underline{\lim}\, E_n^\varepsilon = \bigcap_{t\in\mathbb{N}}\underline{\lim}\, E_n^{1/t}$

{ הכיוון $\subseteq$ טריוויאלי (חיתוך על יותר קבוצות)
לגבי $\supseteq$: אם $x\in\bigcap_{t\in\mathbb{N}}\underline{\lim}\, E_n^{1/t}$ אזי - בהינתן $\varepsilon>0$
קיים $t\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{t}<\varepsilon$ ולכן
$x\in\underline{\lim}\, E_n^{1/t} \Rightarrow x\in\underline{\lim}\, E_n^\varepsilon$ (הכלה), וזאת לכל $\varepsilon>0$]

ולכן, שוב ע"י שימוש דרך ש $\mathcal{S}$ סגורה לחיתוכים בני מניה נסיק כי

$\{x \mid f_n(x) \to 0\}$ מדידה לבג (כלומר: שייכת ל $\mathcal{S}$).

<u>תזכורת</u>: $P \subset \mathbb{R}^d$ מלבן d ממדי אזי <u>מידה</u> מוגדרת להיות נפחו.

(כלומר מכפלת אורכי צלעותיו). $|P| =$ נפח של P.

יהי $E \subseteq \mathbb{R}^d$ מלבן.

<u>הגדרה</u> - <u>מידה חיצונית</u> של $A \in \mathbb{P}(E)$ מוגדרת

$$m^*(A) := \inf_{A \subseteq \bigcup P_i} \sum_i |P_i|$$

כאשר הגבול התחתון נלקח מתוך כל הכיסויים הסופיים ובני המניה של A ע"י <u>מלבנים</u> ($\{P_i\}$).

$A \in \mathcal{E} \subseteq \mathbb{P}(E)$ <u>אלמנטרית</u> $\iff$ $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} P_i$

כלומר: A מהווה איחוד <u>זר</u> סופי של מלבנים.

$S \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}(E)$ <u>מדידה לבג</u> $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \epsilon \in \mathcal{E} : m^*(S \Delta \epsilon) < \varepsilon$

<u>למה</u>: נניח $A, B \subseteq \mathbb{P}(E)$ שרירותיים:

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \Delta B)$$

<u>הוכחה</u> - כיוון שהביטוי מימין סימטרי ביחס ל A ו-B ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות כי $m^*(A) \geq m^*(B)$

כעת: $A \subseteq B \cup (A \Delta B)$

לכן לפי המונוטוניות של m^*:

$$m^*(A) \leq m^*(B \cup (A \Delta B)) \underset{\substack{\uparrow \\ m^* \text{ תת-אדיטיביות}}}{\leq} m^*(B) + m^*(A \Delta B)$$

$\Leftarrow$ $m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A \Delta B)$ <u>כנדרש</u>.

הוכח: אם $m^*(A)=0$ אז $m^*(A\cup B)=m^*(B)$

הוכחה:

$$m^*(B) \le m^*(A\cup B) \le \underbrace{m^*(A)}_{=0}+m^*(B) = m^*(B)$$

$\le$ הראשון: מונוטוניות m^*, $B\subseteq A\cup B$; $\le$ השני: תת אדטיביות m^*

מ.ש.ל.

תרגיל: תהי A קבוצת האי רציונליים ב-$[0,1]$ הוכח כי
$$m^*(A)=1$$

פתרון: **טענה** (חשובה!): המידה החיצונית של נקודה $=0$.

הסבר: תהי $x\in\mathbb{R}$ אזי לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$x\in(x-\frac{\varepsilon}{2},x+\frac{\varepsilon}{2})=:P_\varepsilon$ (שמתן ב-$\mathbb{R}$), והמידה של P_ε היא ε (אורך של קטע)

לכן:

$$\forall\varepsilon>0\quad m^*(\{x\})\le\varepsilon$$

מונוטוניות m^*: $\{x\}\subset P_\varepsilon$

ומכאן, לפי הגד' m^* (כ inf), כאשר $\varepsilon\to0$ נקבל $m^*(\{x\})=0$. ■

כעת: נסמן ב-B את קב' הרציונליים ב-$[0,1]$, $B=\mathbb{Q}\cap[0,1]$

$B\subset\mathbb{Q}$ בת מנייה, כלומר: $B=\{x_n\}_{\mathbb{N}}$

וכמו כן: $m^*(B)\le\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{m^*(\{x_n\})}_{=0}$.

לכן $m^*(B)=0$

נזכור כי $[0,1]=A\dot\cup B$

ולפי התרגיל הקודם $m^*(A)=m^*(A\cup B)=m^*([0,1])=1$

$m^*(B)=0$; אורך הקטע

מ.ש.ל.

תזכורת: ראינו בהרצאה ש-$m^*|_S$ אדיטיבית. כלו' אם $A,B,C\in S$, $A=B\dot\cup C$ אז $m^*(A)=m^*(B)+m^*(C)$

טענה: אם $E,F\in S$, $E\subseteq F$ אזי מתקיימת תכונת החיסור:

$$m^*(F-E)=m^*(F)-m^*(E)$$

(*) **הערה:** הפרש של קבוצות מתוך S שייך גם הוא ל-S, כי: $\overset{\in S}{E_1} - \overset{\in S}{E_2} = \overset{\in S}{E_1} \cap \overset{\in S}{E_2^c}$
(σ-אלגברות סגורות לגבי המשלים ולחיתוכים)

הוכחה: $F = E \cup (F - E)$

ולפי האדטיביות של $m^*|_S$: $m^*(F) = m^*(E) + m^*(F-E)$

כנדרש!

משפט: אם $\{E_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq S$ סדרה עולה של קב' מדידות:

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$$

אזי
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(E_n)$$

הוכחה:

$$\forall n: \quad E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup \cdots \cup (E_n - E_{n-1})$$

וכל הקבוצות באיחוד הנ"ל שייכות ל-S.

לפי האדטיביות של $m^*|_S$:

$$(*) \quad m^*(E_n) = m^*(E_1) + m^*(E_2 - E_1) + \dots + m^*(E_n - E_{n-1})$$

כמו כן:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_2) \cup \dots\dots$$

לכן:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m^*(E_1) + m^*(E_2 - E_1) + \dots\dots$$

[סכום של טור = גבול הסכומים החלקיים]

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty}\left(m^*(E_1) + m^*(E_2 - E_1) + \dots + m^*(E_n - E_{n-1})\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} m^*(E_n) \quad \blacksquare$$

תרגיל: הוכיחו את אי שוויון ה-Δ עבור המרחק (מטריקה) שהוגדר בהרצאה:

$$A, B \in \mathbb{P}(E): \quad \rho(A,B) := m^*(A \Delta B)$$

פתרון: צריך להוכיח:

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$$

נחשב:

$$\rho(A,C) + \rho(C,B) = m^*(A\Delta C) + m^*(C \Delta B)$$

(תת אדטיביות m^*)
$$\geq m^*((A\Delta C) \cup (C \Delta B)) =$$
$$= m^*((A-C)\cup(C-A)\cup(C-B)\cup(B-C))$$
$$= m^*[((A\cup B)-C) \cup (C-(A\cap B))]$$
$$= m^*((A\cup B\cup C)-(A\cap B))$$
$$\geq m^*((A\cup B)-(A\cap B)) = \rho(A\Delta B)$$

מונוטוניות m^*

Scanned by CamScanner