תרגיל 5 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

פתרון: בטופולוגיה הקו־סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם A סגוחה אז A סגורה וגם A^c סגורה. כלומר A סופית וגם A^c סופית. ולכן $X = A \cup A^c$ גם סופית.

(ב) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X, τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

פתרון: לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית X ואת $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ כאשר $a \in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמא עם אינסוף קבוצות פתוחות.

ניקח $X = \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. כלומר $A_n = \mathbb{N} \cap (0, n]$. ברור שכל A_n היא קבוצה סופית. קל לוודא ש $\tau = \{A_n\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

2. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) הטופולוגיה טריויאלית.

(ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

פתרון: נניח שהטופולוגיה טריויאלית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $x_n \in X$ החל מ n מסוים (במקרה $n = 1$) ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

3. (א) יהי $X = \{a, b\}$ עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ (כזכור זהו מרחב Sierpiński). מצאו את כל הסדרות המתכנסות לאיבר אחד ואת כל הסדרות המתכנסות לשני איברים.

פתרון: יש רק שני איברים שסדרה יכולה להתכנס אליהם. קל לבדוק שכדי שסדרה תתכנס ל a צריך שהחל משלב מסוים היא תהיה a (כי $\{a\}$ קבוצה פתוחה) מצד שני כל סדרה מתכנסת ל b (כי $\{a, b\}$ הקבוצה הפתוחה היחידה שמכילה את b). לסיכום: סדרה שהיא a החל ממקום מסוים מתכנסת גם ל a וגם לb. שאר הסדרות מתכנסות לb בלבד.

(ב) תהי X קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו־סופית. נניח ש x_n היא סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו כי היא מתכנסת לכל $x \in X$. (הסיקו כי מרחב קו־סופי הוא מטריזבילי אם ורק אם הוא סופי).

פתרון: יהי $x \in X$ ותהי U קבוצה פתוחה. כלומר U^c היא קבוצה סופית. היות שבסדרה $\{x_n\}$ אין חזרות החל משלב מסוים כל אברי הסדרה נמצאים ב U(יש רק מספר סופי של איברים ב U^c) לכן $x_n \to x$.

מכאן נסיק: נניח X מרחב קו־סופי. אם X סופי אז X דיסקרטי (כל קבוצה היא סופית ולכן כל קבוצה היא סגורה) ולכן מטריזבילי. אם X אין סופי אז יש סדרה שכל איבריה שונים. סדרה זו מתכנסת ליותר מאיבר אחד ולכן X לא מטריזבילי (במרחבים מטריים יש יחידות לגבול).

4. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1\subseteq\tau_2$ ו $\sigma_2\subseteq\sigma_1$. הוכיחו כי

$$f:(X,\tau_2)\to(Y,\sigma_2)$$

היא גם רציפה. (על אותו עקרון, שימו לב לעובדה הבאה: כל פונקציה לתוך מרחב טריויאלי היא רציפה. כל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה).

פתרון: תהי U קבוצה פתוחה ב σ_2. אזי היא פתוחה גם ב σ_1 היות ש $f:(X,\tau_1)\to(Y,\sigma_1)$ רציפה אז $f^{-1}(U)$ פתוחה ב τ_1 ולכן היא גם פתוחה ב τ_2. לכן $f:(X,\tau_2)\to(Y,\sigma_2)$ רצפיה כנדרש. על אותו עקרון כל פונקציה $f:X\to Y$ לתוך מרחב טריויאלי Y היא רציפה (כי הפתוחות היחידות הן $\emptyset,Y$ והמקורות שלהן הם $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset,\quad f^{-1}(Y)=X$ שהן פתוחות. כמו כן כל פונקציה $f:X\to Y$ מתוך מרחב דיסקרטי X היא רציפה כי המקור של כל קבוצה היא קבוצה פתוחה.

5. הוכיחו: מרחב מטרי X מקיים את תכונה T_1 אם ורק אם כל נקודון (קבוצה עם איבר אחד) היא קבוצה סגורה.

פתרון: נניח ש X מקיים את תכונה T_1 ונניח $a\in X$. לכל $b\in X$ כך ש $b\neq a$ ניתן למצוא U_b פתוחה כך ש $b\in U_b$ אבל $a\notin U_b$ (לפי תכונה T_1). עכשיו נסתכל על $Y=\bigcup_{b\in X\setminus\{a\}}U_b$ ברור ש

$$Y=X\setminus\{a\}$$

וכן Y פתוחה בתור איחוד פתוחות ולכן משילמתה $\{a\}$ היא קבוצה סגורה.

מצד שני נניח שכל נקודה היא קבוצה סגורה. ניקח $a,b\in X$ כך ש $a\neq b$. היות ש $\{a\}$ היא קבוצה סגורה נקבל ש $U=\{a\}^c$ היא קבוצה פתוחה. $b\in U$ ו $a\notin U$ ולכן אקסיומה T_1 מתקיימת.

6. איזה מבין אקסיומות ההפרדה T_0, T_1, T_2 מקיים:

(א) מרחב Sierpiński?

פתרון: מקיים T_0 כי לכל שתי נקודות שונות שתיקח (הן חייבות להיות a,b כי אין נקודות אחרות) אז יש קבוצה פתוחה שמכילה את a אבל לא את b. קבוצה זו היא $\{a\}$. המרחב לא מקיים את T_1 כי לא כל נקודה היא קבוצה סגורה ($\{a\}$ אינה קבוצה סגורה) ולכן בוודאי לא מקיים את T_2

(ב) מרחב קו־סופי (על קבוצה X אינסופית)?

פתרון: המרחב מקיים את T_1 (כי כל נקודה היא קבוצה סופית ולכן סגורה) ולכן המרחב מקיים גם את T_0. המרחב לא מקיים את T_2 לסדרות אין בהכרח גבול יחיד (שזו תכונה שמתקיימת במרחב T_2).

7. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A\subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A:X\to\mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

פתרון: X קשירה אם ורק אם אין $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) שהיא סגוחה. לכן מספיק להראות ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה. אבל באמת, נניח ש A סגוחה ותהי $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אז

$$\chi_A^{-1}(U) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

ולכן χ_Aרציפה. מצד שני, אם χ_A רציפה אז

$$A = \chi_A^{-1}(\{1\})$$

$$A = \chi_A^{-1}((0.5, 1.5))$$

ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

8. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B.
פתרון: נכון. אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A פשוט לפי הגדרה של טופולוגית תת מרחב. כנ"ל $B \cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.
פתרון: לא. ניקח $X = \mathbb{R}$ ו $A = C = \{0\}$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A. ניקח $B = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ אז $B \cap C = \emptyset$ פתוחה אבל $\{0\}$ לא פתוחה ב $A \cup B = \mathbb{R}$

9. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $Z \subseteq Y \subseteq X$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).
פתרון: נכניס סימונים כאלה: τ היא הטפולוגיה של X. τ_Y ו τ_Z הן טפולוגיות התת מרחב על Y ו Z בהתאמה. כמו כן σ תהיה טופלוגיית תת המרחב ש (Y, τ_Y) משרה על Z. צריך להוכיח ש $\sigma = \tau_Z$. נוכיח הכלה דו כיוונית. נניח $A \in \sigma$ כלומר $A = Z \cap U$ כאשר $U \in \tau_Y$. לפי הגדרה $U = Y \cap V$ כאשר $V \in \tau$. לכן

$$A = Z \cap Y \cap V = Z \cap V$$

כאשר V פתוחה ב X. לפי הגדרה זה אומר ש $A \in \tau_Z$. מצד שני נניח $A \in \tau_Z$כלומר

$$A = Z \cap U$$

כאשר U פתוחה ב X. אז היות ש $Z \subseteq Y$ נקבל ש

$$A = Z \cap Y \cap U$$

ולפי הגדרה $Y \cap U \in \tau_Y$ ולכן

$$A \in \sigma$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו־סופית היא בעצמה טופולוגיה קו־סופית.

פתרון: נניח X מרחב עם טופולוגיה קו סופית ו $Y \subseteq X$. צריך להוכיח שהקבוצות הסגורות ב Y הן בדיוק הקבוצות הסופיות. תהי $A \subseteq Y$ קבוצה סגורה אז

$$A = Y \cap U$$

כאשר U סגורה ב X כלומר U סופית ולכן גם A סופית. מצד שני נניח ש $A \subseteq Y$ סופית. אז

$$A = Y \cap A$$

אבל A סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב Y. כנדרש.