תרגיל 12 – פתרון

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים העזרת ההגדרה:

א) $a_n = n^6 - 3n^5 - 3n^4 - n^2 + 2n + 1$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = H^6 - 3H^5 - 3H^4 - H^2 + 2H + 1 = H^6\left(1 - \frac{3}{H} - \frac{1}{H^4} + \frac{2}{H^5} + \frac{1}{H^6}\right),$$

קיבלנו ש־ a_H הוא מספר אינסופי חיובי ולכן:

$$lim_{n\to\infty} = \infty$$

ב) $a_n = \sqrt{5n^4 + n^2} - \sqrt{5n^4 - n^2 + n + 1}$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = \sqrt{5H^4 + H^2} - \sqrt{5H^4 - H^2 + H + 1} = \frac{\left(\sqrt{5H^4+H^2} - \sqrt{5H^4-H^2+H+1}\right)\left(\sqrt{5H^4+H^2} + \sqrt{5H^4+H^2}\right)}{\sqrt{5H^4+H^2} + \sqrt{5H^4-H^2+H+1}} =$$

$$\frac{2H^2-H-1}{\sqrt{5H^4+H^2} + \sqrt{5H^4-H^2+H+1}} = \frac{2-\frac{1}{H}-\frac{1}{H^2}}{\sqrt{5+\frac{1}{H^2}} + \sqrt{5-\frac{1}{H^2}+\frac{1}{H^3}+\frac{1}{H^4}}}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = st(a_H) = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ג) $a_n = \sqrt[3]{n^9 + n^6 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^9 - n^6 - 1}$

פתרון:

יהי H אינסופי היפר טבעי,

$$a_H = \sqrt[3]{H^9 + H^6 - 3H + 3} - \sqrt[3]{H^9 - H^6 - 1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3} - \sqrt[3]{H^9+H^6-1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\right)^2 + \sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\,\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right) + \left(\left(\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\right)^2 + \sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\,\sqrt[3]{H^9-H^6-1} + \left(\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{H^9+H^6-3H+3-\left(H^9-H^6-1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\right)^2 + \sqrt[3]{H^9+H^6-3H+3}\,\sqrt[3]{H^9-H^6-1} + \left(\sqrt[3]{H^9-H^6-1}\right)^2\right)} = \frac{2H^6-3H+4}{(*)} =$$

$$= \frac{2-\frac{3}{H^5}+\frac{4}{H}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{H^3}-\frac{3}{H^8}+\frac{3}{H^9}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{H^6}-\frac{3}{H^8}+\frac{3}{H^9}}\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{H^3}-\frac{1}{H^9}} + \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{H^3}-\frac{1}{H^9}}\right)^2}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = st(a_H) = \frac{2}{3}$$

שאלה 2

חשבו את הגבולות הבאים בעזרת המשפטים או בעזרת ההגדרה:

א) $\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון:

$$\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4} = \left(\frac{2n^3+3-4}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4} = \left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{(3n^3+4)\cdot\frac{2n^3+3}{2n^3+3}} = \left(\left(1 - \frac{4}{2n^3+3}\right)^{2n^3+3}\right)^{\frac{3n^3+4}{2n^3+3}} \to$$

$$\left(e^{-4}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{-6}$$

ב) $\frac{(ln(n))^n}{(5n)^n}$

פתרון:

לפי חוקי חזקות נרשום:

$$\left(\frac{ln(n)}{5n}\right)^n = e^{n\cdot ln\left(\frac{ln(n)}{5n}\right)}$$

קל לראות שהחזקה שואפת ל־$-\infty$ ולכן הגבול של הסדרה כולה שואף ל־0 .

ג) $\frac{(-1)^n}{n}$ (אפשר לפתור את התרגיל הזה בכמה שיטות, נסו כאן משפט הסנוויץ)

פתרון:

נשים לב ש- $-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$,

$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 = lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ $lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$

ד) $\frac{5^n+7^n}{5^n-7^n}$

פתרון:

$$lim_{n\to\infty}\frac{5^n+7^n}{5^n-7^n} = lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{7}\right)^n-1} = -1$$

הסבר:

נתבונן הפונקציה $f(x) = \left(\frac{5}{7}\right)^x$, זו פונקציה מעריכית עם בסיס בין אפס לאחד, ולכן כאשר $x \to \infty$ הגבול שלה הוא אפס ולכן הגבול של $\left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא גם אפס.

ה) $\left(8^n - n^2\right)$

פתרון:

$$8^n - n^2 = n^2\left(\frac{8^n}{n^2} - 1\right)$$
$$lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

$lim_{n\to\infty}\left(\frac{8^n}{n^2} - 1\right) = \infty$ לפי משפט סדרי גודל ולכן הגבול של הסדרה שלנו היא ∞.

ו) $\frac{n!+6}{(n+1)!+8}$

פתרון:

$$\frac{n!\left(1+\frac{6}{n!}\right)}{n!\left(n+1+\frac{8}{n!}\right)} = \frac{1+\frac{6}{n!}}{n+1+\frac{8}{n!}}$$
$$lim_{n\to\infty}\frac{6}{n!} = lim_{n\to\infty}\frac{8}{n!} = 0$$
$$lim_{n\to\infty} n = \infty$$

ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{n!+6}{(n+1)!+8} = 0$

ז) $\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2+2n}{7n^3+2n-2}}$

פתרון:

נרשום $e^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}\cdot ln\left(\frac{n}{n^2-2}\right)} = \left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}}$

$$lim_{n\to\infty}\frac{8n^4-3n^2-3n^3-2n}{7n^3-2n-2}\cdot ln\left(\frac{n}{n^2-2}\right) = -\infty$$

ולכן $lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{\frac{8n^4-3n^3-3n^2-2n}{7n^3-2n-2}} = e^{-\infty} = 0$

ח) $\frac{4^{n-5}}{2^n}$

פתרון:

$$\frac{4^{n-5}}{2^n} = (2)^n\cdot\frac{1}{4^5}$$

2^n זו סדרה ששואפת ל-∞ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-5}}{2^n} = \infty$

שאלה 3

א) הוכיחו ש־$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ כאשר $0<a\in\mathbb{R}$

פתרון:

נתבונן בפונקציה $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$ כאשר $x\to\infty$ הגבול $lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{x}}=lim_{n\to\infty}e^{\frac{ln(a)}{x}}=$ $e^0=1$

ולכן הגבול של הסדרה שלנו הוא 1

ב) תנו דוגמה לסדרות הבאות ונמקו את תשובתכם:

1) חסומה שלא מתכנסת

פתרון:

$a_n=(-1)^n$ זו סדרה חסומה בין 1־ ל 1 , וראינו בהרצאה שהיא לא מתכנסת

2) סדרה מונוטונית שלא חסומה

$a_n=n$, הסדרה הזו היא עולה כי $a_{n+1}-a_n=n+1-n=1>0$ ולכן היא מונוטונית.

הסדרה לא חסומה, כי אחרת היא היתה מתכנסת לגבול סופי לפי משפט מההרצאה.

נציב H אינסופי היפר טבעי ונקבל $a_H=H$ שהוא מספר אינסופי חיובי ולכן הסדרה מתבדרת ל־∞ בסתירה.

ולכן הסדרה לא חסומה מלעיל אבל היא כן חסומה מלרע ע"י 1

3) סדרה לא מונוטונית ולא חסומה

$a_n=(-1)^n n$

הסדרה לא מונוטונית כי אם nזוגי אזי $n+1$ הוא אי זוגי ולכן $a_{n+1}-a_n=-(n+1)-n=-2n-1<0$

מצד שני אם n אי זוגי ואז $n+1$ זוגי אזי $a_{n+1}-a_n=n+1-(-n)=2n+1>0$

הסדרה לא חסומה כי עבור n־ים זוגיים נסמן $n=2k$נקבל $a_{2k}=2k$ ולכן הסדרה לא חסומה מלעיל

ועבור n־ים אי זוגיים נסמן $n=2k+1$ ונקבל $a_{2k+1}=-(2k+1)$ ולכן הסדרה לא חסומה מלרע.

4) סדרה יורדת וחסומה מלרע

פתרון:

$a_n=\frac{1}{n}$, זו סדרה יורדת כי $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=0$

ברור שהסדרה חסומה מלרע ע"י 0 כי $\frac{1}{n}>0$ לכל n טבעי.

5) סדרה עולה וחסומה מלעיל

פתרון:

$a_n=-\frac{1}{n}$, ברור שהסדרה היא מונוטונית עולה כי $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}>0$

ברור שהסדרה חסומה מלעים על ידי 0 כי $-\frac{1}{n}<0$ לכל n טבעי.

ג) נתונות שתי סדרות a_n,b_n הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1) אם $lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$ אזי $lim_{n\to\infty}a_n=0$ או $lim_{n\to\infty}b_n=0$.

פתרון:

הפרכה, נבחר

$a_n=\begin{cases}1 & n\text{ is even}\\ 0 & n\text{ is odd}\end{cases}$, $b_n=\begin{cases}0 & n\text{ is even}\\ 1 & n\text{ is odd}\end{cases}$

כלומר $a_n=0,1,0,1,0,1.....$, $b_n=1,0,1,0,1,0,....$

קל לראות ש־$a_n\cdot b_n=0$ ולכן הגבול הוא אפס, מצד שני ברור ש־$a_n,b_n\neq 0$

2) אם $a_n + b_n$ היא סדרה מתכנסת אזי a_n ו־b_n מתנסות.

פתרון:
הפרכה: נבחר $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$
כלומר $a_n = -1, 1, -1, 1, -1, ...$, $b_n = 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$
ברור ש־$a_n + b_n = 0$ לכל n טבעי ולכן הגבול הוא אפס, מצד שני ראינו מהרצאה שהסדרות הללו הן סדרות מתבדרות

שאלה 4

תהי a_n סדרה ששואפת לאפס, b_n סדרה שאין לה גבול (לא סופי ולא אינסופי).

א) תנו דוגמה ל־a_n, b_n עבורן $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

פתרון:
$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$, ולכן $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

ב) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1$

פתרון:
$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = (-1)^n n$,
$lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = lim \frac{(-1)^n (-1)^n n}{n} = 1$

ג) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n עבורן $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ לא קיים

פתרון:
$a_n = (-1)^n n$, $b_n = \frac{1}{n}$ ולכן

$lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = lim \frac{(-1)^n n}{n} = lim (-1)^n$ לא קיים

ד) בתנאים של התרגיל, מה אפשר להגיד על הגבול של $a_n \cdot b_n$?

פתרון:
לא ניתן להגיד כלום

שאלה 5

הוכיחו בעזרת ההגדרה של ϵ ש־$lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{2n} = 2$

פתרון:
יהי $\epsilon > 0$ נרצה למצוא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\left|\frac{4n+5}{2n} - 2\right| < \epsilon$.
$\left|\frac{4n+5}{2n} - 2\right| = \left|\frac{4n+5-4n}{2n}\right| = \left|\frac{5}{2n}\right| < \epsilon$ אם ורק אם $n > \frac{5}{2\epsilon}$ ולכן אפשר לקחת $n_0 = \left\lfloor \frac{5}{2\epsilon} \right\rfloor + 1$.

תרגיל 6

הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול של מספרים ממשיים (הגדרת ε,δ) את הטענות הבאות:

א. תהי פונקציה f המקיימת $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.
הוכיחו כי לכל $c \in R$ מתקיים $\lim\limits_{x\to a} c * f(x) = c * L$

ב. תהי פונקציה f המקיימת $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, ותהיו g המקיימת לכל x : $g(x) \ge f(x)$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

<u>פתרון:</u>

6) א)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$$\Downarrow$$

לכל $0<\frac{\varepsilon}{|c|}$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in R$ המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{|c|}$

$$\Downarrow$$

לכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים

$$|c\cdot f(x) - c\cdot L| = |c|\cdot|f(x)-L| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot L$$

ה)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\Downarrow$$

לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $f(x)=|f(x)|\geq M$

$$\Downarrow$$

לכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים

$$g(x) \geq f(x) \geq M$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$