בס״ד

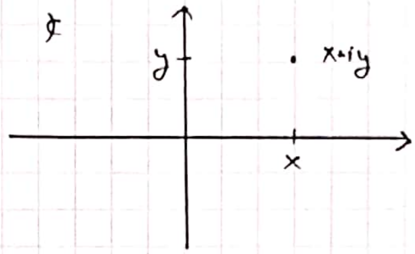
אנליזה הרמונית - תרגול

חזרה על מרוכבים:

$i^2=-1$

מספר מרוכב: $z=x+iy$

אפשר להציג את המספר במישור:



המספר $x+iy$ מתאים לנקודה (a,b).

באמצעות המישור אפשר להציג את המספר $x+yi$ בקואורדינטות קוטביות:

$x=r\cos\theta \; , \; y=r\sin\theta$

r הוא מרחק הנקודה מהראשית

θ היא הזווית עם החלק החיובי של ציר ה-x.

$0\le r<\infty$. $0<\theta<2\pi$

אם כן:

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,cis\theta$$

המעבר בין ההצגות:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ לשים לב לרביע המתאים

$\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (לפעמים צריך להוסיף π)

נסמן: $cis\theta=e^{i\theta}$

ואז: $z=re^{i\theta}$

הרבה פעולות הופכות לפשוטות בהצגה המעריכית.

העלאה בחזקה:

$$z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$$

צמוד וערך מוחלט:

המספר הצמוד של $z=x+iy$ הוא $\bar{z}=x-iy$

בהצגה קוטבית: $z=r\,cis\theta=re^{i\theta}$ $\quad \bar{z}=r\,cis(-\theta)=re^{-i\theta}$

ערך מוחלט הוא המרחק של z מהראשית, כלומר: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=r$

מתקיים:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

הוצאת שורש:

למספר מרוכב z יש n שורשים (שונים) מסדר n, כלומר קיימים $w_1,w_2,\dots,w_n$

כך ש $w_k^n=z$ לכל $1\le k\le n$

איך מוצאים את השורשים?

נשים ♥ איך מוגדר שוויון בין מרוכבים.

(א) הצגה אלגברית:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1=x_2\wedge y_1=y_2$$

(ב) הצגה מעריכית:

$$r_1e^{i\theta_1}=r_2e^{i\theta_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$r_1=r_2\wedge\theta_1=\theta_2+2\pi k\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

כעת:

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=(re^{i\theta})^{\frac{1}{n}}=(re^{i(\theta+2\pi k)})^{\frac{1}{n}}$$
$$=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}$$

ולכל $1\le k\le n$ נקבל שורש שונה.

תרגיל:

הוכיחו שמתקיים:

$$\sin(2x)=2\cos x\sin x$$

פתרון:

אפשר להשתמש בטריגו, נשתמש בהצגה הקוטבית.

מצד אחד:

$$e^{i2\theta}=cis\,2\theta=\cos2\theta+i\sin2\theta$$

מצד שני:

$$(e^{i\theta})^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta$$

כלומר:

$$\cos2\theta+i\sin2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta+i2\cos\theta\sin\theta$$

נשווה את החלקים המדומים: $\sin2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ כנדרש

מכפלה פנימית - תרגול 2

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

פונקציה $\langle\, ,\, \rangle : V\times V \to F$ נקראת מכפלה פנימית (מ"פ), אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

(1) לינאריות ברכיב הראשון:

$$\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$$

$$\langle \alpha u, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle$$

(2) הרמיטיות:

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

(3) אי שליליות:

$$\langle u,u\rangle \geq 0$$

כמו כן, $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

למשל:

ב-$\mathbb{R}^n$

$$u=(u_1,\dots,u_n)$$
$$v=(v_1,\dots,v_n)$$
$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

ב-$\mathbb{C}^n$

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

תרגיל:

הראו שהפונקציות הבאות מקיימות את תכונות הלינאריות וההרמיטיות. בדקו האם הן מ"פ.

(א) $V=M_n(\mathbb{C})$ (מטריצות מסדר n מעל $\mathbb{C}$), עם הפונקציה הבאה: $\langle A,B\rangle = tr(B^*A)$

$B^* = \bar{B}^t$ (שחלוף והצמדה)

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$$

tr - סכום איברי האלכסון

פתרון:

יהי $A\in M_n(\mathbb{C})$. נחשב:

$$\langle A,A\rangle = tr(A^*\cdot A)$$

$(A)_{ij}$ - האיבר של A בשורה ה-i בעמודה ה-j.

אם כן: $tr(A^*A) = \sum_{i=1}^n (A^*A)_{ii}$ $\quad (A^*\cdot A)_{ii}$ - איברי האלכסון

כפל מטריצות:

$$(A^*A)_{ii}=R_i(A^*)\cdot C_i(A)$$

R_i – השורה ה i, C_i – העמודה ה i.

אם נסמן: $C_i(A)=(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{ni})$, מכיוון ש $A^*=\bar{A}^t$, נקבל: $R_i(A^*)=\overline{C_i(A)}=(\bar{a}_{1i},\dots,\bar{a}_{ni})$

ולכן:

$$(A^*A)_{ii}=\overline{C_i(A)}\cdot C_i(A)=\underbrace{|a_{1i}|^2}_{a_{1i}\cdot\overline{a_{1i}}}+|a_{2i}|^2+\dots+|a_{ni}|^2$$

מכאן:

$$tr(A^*A)=(A^*A)_{11}+(A^*A)_{22}+\dots+(A^*A)_{nn}$$

כמו שראינו, כל אחד מהמחוברים הוא סכום:

$$\begin{aligned}=&|a_{11}|^2+|a_{21}|^2+\dots|a_{n1}|^2+\\&+|a_{12}|^2+|a_{22}|^2+\dots|a_{n2}|^2\\&\vdots\\&+|a_{1n}|^2+|a_{2n}|^2+\dots+|a_{nn}|^2\end{aligned}$$

לכל i,j, $0\le|a_{ij}|^2$, ולכן: $0\le tr(A^*A)$ כלומר $0\le\langle A,A\rangle$

כמו כן, אם $A=0$ אזי $a_{ij}=0$ לכל i,j ואזי גם $\langle A,A\rangle=0$

לגבי שני, אם $\langle A,A\rangle=0$, אז:

$$|a_{11}|^2+\dots+|a_{n1}|^2+\dots+|a_{1n}|^2+\dots+|a_{nn}|^2=0$$

לכן סכום של מספרים אי שליליים מתאפס, ולכן כל אחד מהאיברים שווה ל-0.

$|a_{ij}|^2=0$. מכאן, $a_{ij}=0$ (לכל i,j) ולכן $A=0$.

סה"כ תכונה הג' שלישית מתקיימת ולכן זו מ"פ.

(ג) נסמן ב $E[0,1]$ את מרחב הפונקציות המוגדרות בקטע $[0,1]$ עם מספר סופי של נקודות אי רציפות (כל אי הרציפות מסוג א').

נגדיר:

$$\langle f,g\rangle=f(\tfrac{1}{3})\cdot g(\tfrac{1}{3})+\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

פתרון

יהי $f\in E[0,1]$, נחשב:

$$\langle f,f\rangle=f(\tfrac{1}{3})\cdot f(\tfrac{1}{3})+\int_0^1 f(x)\cdot f(x)\,dx=f^2(\tfrac{1}{3})+\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

$0\le f^2(\frac{1}{3})$, $0\le f^2(x)$ ולכן גם $0\le\int_0^1 f^2(x)\,dx$ ומכאן $0\le\langle f,f\rangle$.

אם $f=0$ אזי גם $f(\frac{1}{3})=0$ וגם $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0$ ולכן: $\langle f,f\rangle=0$

אך, אם $\langle f,f\rangle=0$ אזי לא הכרח נקבל ש $f=0$. לדוגמה, נתבונן בפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}2 & x=0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

נקח:

$$f^2(x)=\begin{cases} 4 & x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{cases}$$

ואז, פה אף ש $f\neq 0$ נקבל:

$$\langle f,f\rangle = f^2(\tfrac{1}{3})+\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0+0=0$$

ולכן, זו אינה מכפלה פנימית.

• במרחב $C[0,1]$ של פונקציות רציפות, זו מכפלה.

נורמה:

יהי V מרחב מכפלה פנימית.

הנורמה $u\in V$ באופן הבא.

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

תכונות:

(1) $\|u\|\geq 0$ וגם $u=0 \Leftrightarrow \|u\|=0$

(2) $\|\alpha u\|=|\alpha|\cdot\|u\|$

(3) אי שוויון המשולש: $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$, אפשר להסיק לגבי יותר משני איברים.

(4) אי קושי שוורץ: $|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$

למשל:

ב $\mathbb{C}^n$, $v=(v_1,\dots,v_n)$, $u=(u_1,\dots,u_n)$

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i\bar{u}_i}=\sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$$

אי קושי שוורץ:

$$\underbrace{\left|\sum_{i=1}^n u_i\bar{v}_i\right|}_{|\langle u,v\rangle|}\leq\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n|u_i|^2}}_{\|u\|}\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n|v_i|^2}}_{\|v\|}$$

אורתונורמליות - תרגול 3

יהי V מרחב מכפלה פנימית.

קבוצת וקטורים (סופית) $E=\{v_1,\dots,v_n\}$ נקראת אורתוגונלית אם מתקיים:

$\langle v_i, v_j\rangle = 0$ לכל $i\neq j$.

• אם $\langle u,v\rangle=0$ נאמר שהם מאונכים ונסמן $u\perp v$.

E נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית וגם $\|v_i\|=1$, לכל i.

במילים אחרות, E אורתונורמלית אם:

$$\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

קבוצה אורתונורמלית היא בת״ל.

קבוצה $B\subseteq V$ נקראת בסיס אורתונורמלי, אם היא בסיס ואורתונורמלית.

אם $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ אז, לכל $u\in V$ מתקיים:

$$u=\sum_{i=1}^{n}\langle u,v_i\rangle v_i=\langle u,v_1\rangle v_1+\dots+\langle u,v_n\rangle v_n$$

תרגילים:

(1) נתבונן במרחב $V=\mathbb{R}_1[x]$, פולינומים ממעלה לכל היותר 1 עם מקדמים ממשיים.

$$\mathbb{R}_1[x]=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

נגדיר פונקציה: $\langle\, ,\, \rangle : V\times V\to V$ כך:

$$\langle p,q\rangle=\int_0^\infty p(x)q(x)\cdot e^{-x}\,dx$$

א. הוכיחו שהפונקציה מוגדרת היטב, כלומר, שלכל $p,q\in\mathbb{R}_1[x]$, אז $\langle p,q\rangle\in\mathbb{R}$

פתרון:

אנחנו צריכים להראות שלכל $p,q\in\mathbb{R}_1(x)$, $\int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}\,dx$ מתכנס.

לכל $p,q\in\mathbb{R}_1[x]$ $p\cdot q$ הוא פולינום ממעלה 2, כלומר:

$$p(x)q(x)=ax^2+bx+c$$

והאינטגרל הוא:

$$=\int_0^\infty(ax^2+bx+c)e^{-x}\,dx=a\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx+b\int_0^\infty xe^{-x}\,dx+c\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

נראה שכל האינטגרלים מתכנסים.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^R\xrightarrow{R\to\infty}\lim_{R\to\infty}-e^{-R}+1=1 \checkmark$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\,dx=\overset{\text{חלקים:}}{\begin{cases}u=x\to u'=1\\ v'=e^{-x}\to v=-e^{-x}\end{cases}}=\lim_{R\to\infty}\Big(\underbrace{-xe^{-x}\Big|_0^R}_{uv}-\underbrace{\int_0^R 1\cdot(-e^{-x})\,dx}_{u'v}\Big)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-Re^{-R} + \int_0^R e^{-x}\,dx\right) = \underbrace{\lim_{R\to\infty} -\frac{R}{e^R}}_{\text{לופיטל} = 0} + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x}\,dx}_{1}$$

סה"כ: $\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1$ ✓

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^2 e^{-x}\,dx \quad \left\{\begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x}\end{matrix}\right\} = \lim_{R\to\infty}\left(\underbrace{-x^2 e^{-x}\Big|_0^R}_{uv} - \underbrace{\int_0^R 2x(-e^{-x})\,dx}_{\int u'v}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-R^2 e^{-R} + 2\int_0^R x e^{-x}\,dx\right) = \underbrace{\lim_{R\to\infty} -\frac{R^2}{e^R}}_{0\ (\text{לופיטל})} + 2\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\,dx}_{1} = 2$$

ואכן ק: $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2$

בסעיף 3, האינטגרלים מתכנסים ואכן $\langle p,q\rangle \in \mathbb{R}$, הפעולה מוגדרת היטב.

ב. הפעולה היא מ"פ. מצאו בסיס אורתונורמלי.

תנאי: אורך אחד.

פתרון:

אנחנו צריכים שני פולינומים $p(x), q(x)$ כך ש: $\langle p,p\rangle = \langle q,q\rangle = 1$, $\langle p,q\rangle = 0$

(תנאי הכרחי לאורתוגונליות, כלומר: $\langle p,q\rangle = 0$, נמצא פולינומים שמקיימים

זאת, ואז "ננרמל" אותם כך שיהיו בסיס אורתונורמלי:

$$\langle p,q\rangle = \int_0^\infty p(x)\,q(x)\,e^{-x}\,dx = 0$$

נשתמש באינטגרלים שחישבנו בסעיף הקודם.

$$\int_0^\infty 1\cdot e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1$$

לכן: $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx - \int e^{-x}\,dx = 0 = \int_0^\infty (x-1)e^{-x}\,dx = 0$

ולכן נבחר p,q כך שמכפלתם $p(x)\cdot q(x) = x-1$

אפשר לבחור: $p(x) = 1,\ q(x) = x-1$ ואז $\{1, x-1\}$ אורתוגונלי

ולכן בסיס (כי $\dim \mathbb{R}_1[x] = 2$)

נהפוך אותם לאורתונורמליים:

$$\langle p,p\rangle = \langle 1,1\rangle = \int_0^\infty 1\cdot 1\cdot e^{-x}\,dx = 1$$

$$\langle q,q\rangle = \langle x-1, x-1\rangle = \int_0^\infty (x-1)(x-1)e^{-x}\,dx = \int_0^\infty (x^2-2x+1)e^{-x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{x^2 e^{-x}\,dx}_{2} - 2\int_0^\infty \underbrace{xe^{-x}\,dx}_{1} + \int_0^\infty \underbrace{e^{-x}\,dx}_{1} = 1$$

הם כבר אורתונורמליים!

Scanned by CamScanner

נרמול:

איך הופכים בסיס אורתוגונלי לבסיס אורתונורמלי?

מנרמלים! - מחלקים כל וקטור בנורמה שלו.

כלומר, אם $\{v_1,...,v_n\}$ אורתוגונלית, אזי: $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|},...,\frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$

גרם שמידט והיטל אורתוגונלי

יהי V מרחב מכפלה פנימית.

תת מרחב $U \leq V$, עם בסיס: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

תהליך גרם שמידט מאפשר לנו למצוא בסיס אורתוגונלי של U באמצעות הבסיס הנתון $\{v_1, \dots, v_n\}$ איך?

נסמן את הבסיס החדש כך $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n\}$

את הווקטורים $\tilde{v}_i$ נמצא כך:

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, \tilde{v}_1 \rangle \tilde{v}_1}{\| v_2 - \langle v_2, \tilde{v}_1 \rangle \tilde{v}_1 \|}$$

ובאופן כללי:

$$\tilde{v}_k = \frac{v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, \tilde{v}_j \rangle \tilde{v}_j}{\| v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, \tilde{v}_j \rangle \tilde{v}_j \|}$$

♡ אם לא מנרמלים, הבסיס הוא רק אורתוגונלי ולא אורתונורמלי.

היטל אורתוגונלי:

יש לנו בסיס $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ של U, אורתונורמלי:

לכל $v \in V$, ההיטל של v על U מוגדר כך: $\overset{\text{היטל}}{proj}(v) = \sum_{k=1}^{n} \langle v, \tilde{v}_k \rangle \tilde{v}_k$

ההיטל הוא הווקטור ב-U שהכי קרוב ל-V.

כלומר, לכל $u \in U$ מתקיים:

$$\| v - proj(v) \| \leq \| v - u \|$$

תרגיל:

במרחב $C[-1,1]$ נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

נתבונן בתת המרחב: $U = span\{1, x, x^2\}$

נמצא את ההיטל האורתוגונלי של $|x|$ על U.

פתרון:

נמצא בסיס אורתונורמלי ל-U באמצעות גרם שמידט.

אצלנו: $v_1 = 1, \ v_2 = x, \ v_3 = x^2$

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = x \Big|_{-1}^{1} = 2 \rightarrow \|v_1\| = \sqrt{2}$$

ולכן: $\tilde{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\tilde{V}_2 = \frac{V_2 - \langle V_2, \tilde{V}_1 \rangle \tilde{V}_1}{\| V_2 - \langle V_2, \tilde{V}_1 \rangle \tilde{V}_1 \|}$$

$$\langle V_2, \tilde{V}_1 \rangle = \langle x, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x \, dx = 0$$

פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי
תמיד שווה ל-0

ומכאן

$$\Rightarrow \tilde{V}_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}$$

$$\|V_2\|^2 = \langle V_2, V_2 \rangle = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \|V_2\| = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \Rightarrow \tilde{V}_2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}} x$$

$$\tilde{V}_3 = \frac{V_3 - \langle V_3, \tilde{V}_2 \rangle V_2 - \langle V_3, \tilde{V}_1 \rangle \tilde{V}_1}{\| V_3 - \langle V_3, \tilde{V}_2 \rangle \tilde{V}_2 - \langle V_3, \tilde{V}_1 \rangle \tilde{V}_1 \|}$$

$$\langle V_3, \tilde{V}_2 \rangle = \langle x^2, \sqrt{\tfrac{3}{2}} x \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{3}{2}} x^3 = 0$$

$$\langle V_3, \tilde{V}_1 \rangle = \langle x^2, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 \, dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_3 = \frac{x^2 - 0\sqrt{\tfrac{3}{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\| \ldots \|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|}$$

$$\|x^2 - \tfrac{1}{3}\|^2 = \langle x^2 - \tfrac{1}{3}, x^2 - \tfrac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})(x^2 - \tfrac{1}{3}) \, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{1}{9}) \, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{x}{9} = \frac{8}{45}$$

$$\Rightarrow \|x^2 - \tfrac{1}{3}\| = \sqrt{\tfrac{8}{45}} \Rightarrow \tilde{V}_3 = \sqrt{\tfrac{8}{45}} (x^2 - \tfrac{1}{3})$$

אם כן, מצאנו בסיס אורתונורמלי של U:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}} x, \sqrt{\tfrac{45}{8}} (x^2 - \tfrac{1}{3}) \right\}$$

ההטלה של $|x|$ על U היא:

$$Proj(|x|) = \sum_{k=1}^{3} \langle |x|, \tilde{V}_k \rangle \tilde{V}_k = \langle |x|, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \langle |x|, \sqrt{\tfrac{3}{2}} x \rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}} x$$
$$+ \langle |x|, \sqrt{\tfrac{45}{8}} (x^2 - \tfrac{1}{3}) \rangle \sqrt{\tfrac{45}{8}} (x^2 - \tfrac{1}{3})$$

לפי תכונת הלינאריות:

$$= \langle |x|, 1 \rangle \cdot \tfrac{1}{2} + \langle |x|, x \rangle \tfrac{3}{2} x + \langle |x|, x^2 - \tfrac{1}{3} \rangle \tfrac{45}{8} (x^2 - \tfrac{1}{3})$$

נחשב את האינטגרל ונזכור שאם f זוגית אז:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x) \, dx$$

$$\langle |x|, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \cdot 1 \, dx = 2 \int_{0}^{1} |x| \, dx = 2 \int_{0}^{1} x \, dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{1} = 1$$

$$\langle |x|, x\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\,x\,dx = 0$$

$\perp$ אי זוגית

$$\langle |x|, x^2-\tfrac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)dx = 2\int_{0}^{1} |x|\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(x^3-\tfrac{1}{3}x\right)dx = 2\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

סוכם

$$Proj(|x|) = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{45}{8}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

כעת, לכל פונקציה $f\in U$ מתקיים:

$$\left\| |x| - \frac{1}{2} - \frac{45}{48}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\| \le \left\| |x| - f \right\|$$

אנליזה הרמונית / טורי פוריה

אנו מסתכלים על פונקציה רציפה למקוטעין (מספר סופי של אי רציפות, וגבולות חד צדדיים בכל נקודה (סופיים), בקטע $[-\pi,\pi]$.

טור פוריה של f מוגדר כך:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

כאשר:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

הערות:

(א) כאשר f זוגית, אז:

$$b_n = 0\ ,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

אם f אי זוגית, אז:

$$a_n = a_0 = 0\ ,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

(ב) $f(x)$ לא בהכרח שווה לטור.

תרגיל:

חשב טור פוריה בקטע $[-\pi,\pi]$ של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x$

הפונקציה אי זוגית ולכן $a_n = a_0 = 0$

נחשב את b_n: $\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right. = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{uv} - \underbrace{\int_0^{\pi} 1\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx}_{\int u'v}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) \qquad \cos(\pi n) = (-1)^n \text{ ולכן:}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)$$

ולכן: $\sin(\pi n)=0$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

ולכן:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

ב. $f(x)=|x|$

f זוגית ולכן: $b_n=0$ כמו כן:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right)=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x & v'=\cos nx \\ u'=1 & v=\frac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right.$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\pi n)-1\right)$$

אם n זוגי נקבל ש $a_n=0$

אם n אי זוגי נקבל ש $a_n=-\frac{4}{\pi n^2}$ $(n=2k+1)$

$$\Downarrow$$

$$a_n=-\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

ולסכם:

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)x\right)$$

הערה:

טור פורייה של $\sin nx$ / $\cos nx$, הוא הפונקציה עצמה.

למשל, אם נחשב את מקדמי פורייה של $\sin 3x$, אז נקבל שכל המקדמים יתאפסו

ו- $b_3=1$.

ג. $f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}$

נשתמש בזהות של זווית כפולה: $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

ולכן: $f(x)=1-\frac{1}{2}\cos(2x)$ המקדם של $\cos 2x$ הוא $a_2=-\frac{1}{2}$

וזהו טור פורייה של הפונקציה. $1=\frac{a_0}{2} \Leftarrow a_0=2$ וכל שאר המקדמים מתאפסים.

Scanned by CamScanner

תרגול:

נתון טור פורייה של f רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum$$

חשבו את $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin^2 nx\,dx$

נביע את האינטגרל באמצעות מקדמי פורייה:

נשתמש בזהות:

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1-\cos(2nx)}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi a_0 - \pi a_{2n}\right) = \frac{\pi\left(a_0 - a_{2n}\right)}{2}$$

הראנו את הקשר בין f לטור ולהיפך

טור פוריה מרוכב

לפונקציה רציפה למקוטעין f בקטע $[-\pi,\pi]$, אנו יכולים לפתח טור פוריה ממשי באופן הבא:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ואנו יודעים לחשב את a_0, a_n, b_n

אנו יכולים לפתח גם טור פוריה מרוכב, באופן הבא:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

כאשר:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

יש קשר בין הטורים - אפשר לעבור ממקדמים a_n, b_n למקדמים C_n והפוך באופן הבא:

א. ממרוכב לממשי:

$$a_0 = 2C_0, \quad a_n = C_n + C_{-n} \qquad b_n = i(C_n - C_{-n})$$

ב. ממשי למרוכב:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \qquad C_0 = \frac{a_0}{2}$$

תרגיל:

נמצא את טור פוריה המרוכב של $f(x)=|x|$

אנו יודעים שטור פוריה הממשי הוא:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$$

פתרון:

כדי למצוא את C_n, אנו צריכים להבין מהם a_n, b_n.

בטור אין סינוסים כלומר $b_n = 0$

$$a_0 = \pi, \quad a_{2k} = 0$$

מי לא התאפס?

$$a_{2k+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}$$

כעת נמצא את C_n:

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

כאשר $n=2k$

$$C_{2k} = \frac{1}{2}(a_{2k} - ib_{2k}) = 0$$

$$C_{-2k}=\frac{1}{2}(a_{2k}+ib_{2k})=0$$

כאשר $n=2k+1$

$$C_{2k+1}=\frac{1}{2}(a_{2k+1}-ib_{2k+1})=\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}$$

$$C_{-(2k+1)}=\frac{1}{2}(a_{2k+1}+ib_{2k+1})=\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}$$

וסה"כ

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-2}{\pi(2k+1)^2}e^{i(2k+1)x}$$

תרגיל:

נתון טור פורייה: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx}$ של פונקציה f. מצאו את

טור פורייה של $Re(f)$

פתרון:

נסתכל על החלק הממשי של הטור

נשתמש בנוסחאות המעבר:

$$a_n=C_n+C_{-n}\ ,\quad b_n=i(C_n-C_{-n})\qquad a_0=2C_0$$

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\qquad C_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$$

אנחנו רוצים את החלק הממשי:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

אנחנו רוצים את המקדמים של $Re(f)$

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re(f)\cos nx\,dx$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re(f)\sin nx\,dx$$

$$\tilde{C}_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re(f)e^{-inx}\,dx$$

ב/ק ק:

$$\tilde{C}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re(f)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re(f)(\cos nx - i\sin nx)\, dx$$

לפי הגדרה

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} Re(f)\cos(nx)dx - i\int_{-\pi}^{\pi} Re(f)\sin(nx)dx\right) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n - i\tilde{b}_n\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nx\, dx\right) - iRe\left(\int_{-\pi}^{\pi} f\sin nx\, dx\right)\right) = \frac{1}{2}\left(Re(a_n) - iRe(b_n)\right)$$

לפי הנוסחאות [illegible]

$$= \frac{1}{2}\left(Re(c_n + c_{-n}) - i\, Re\left(i(c_n - c_{-n})\right)\right)$$

התכנסות

$\{f_n(x)\}$ - סדרת פונקציות בקטע I.

(1) נאמר ש- f_n מתכנסת נקודתית ל- f אם לכל $x_0 \in I$ $f_n(x_0) \to f(x_0)$

(2) אם: $\|f_n(x)-f(x)\| \to 0$ נאמר ש- f_n מתכנסת ל- f בנורמה

(3) נאמר ש- f_n מתכנסת ל- f במ"ש אם: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| = 0$

תרגיל:

במרחב $C[0,1]$ נגדיר שתי נורמות:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$$

בדקו האם הסדרה הבאה מתכנסת נקודתית, במ"ש, ב- $\|\ \|_1$, ב- $\|\ \|_2$

א. $f_n(x) = x^n$

נבדוק התכנסות נקודתית.

אם $x_0 < 1$ אז: $f_n(x_0) = x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

אם $x_0 = 1$ אז: $f_n(x_0) = 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

לכן, סדרת הפונקציות $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

נשים ♥ שהפונקציה הגבול אינה רציפה ו- f_n רציפות, לכן ההתכנסות אינה במ"ש.

נבדוק התכנסות בנורמה ← נראה ש: $\|f\|_1, \|f\|_2 \to 0$, כלומר:

$$\|f-0\|_1, \|f_n - 0\|_2 \to 0$$

אם כך:

$$\|f_n\|_1 = \|x^n\|_1 = \int_0^1 |x^n|dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$

לכן, f_n מתכנסת ל- 0 בנורמה 1.

$$\|f_n\|_2 = \|x^n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (x^n)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 x^{2n}dx} = \sqrt{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \to 0$$

לכן גם בנורמה 2 f_n מתכנסת ל- 0 בנורמה.

ב. $x^n - x^{2n}$

ראשית, נבדוק התכנסות נקודתית, אם $x_0 < 1$: $f_n(x_0) = x_0^n - x_0^{2n} \to 0$

אם $x_0 = 1$: $f_n(x_0) = 1^n - 1^{2n} \to 0$

לכן, נוכל לומר כי f_n מתכנסת נקודתית ל- 0.

שנית, נבדוק התכנסות במ"ש:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}\{f_n(x)-0\}$$

f_n רציפה ולכן sup=max ואז:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]}\{x^n-x^{2n}\}$$

כדי למצוא מקסימום נגזור ונשווה ל-0:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=0 \quad \Big\backslash : nx^{n-1} \qquad x\neq 0$$

(נבדוק אותו בנפרד)

$$1-2x^n=0$$

$$x^n=\frac{1}{2} \to x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

הערך של f_n בנקודה הוא:

$$f_n\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

אז:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}\{x^n-x^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\neq 0$$

לכן $\{f_n\}$ לא מתכנסת במ"ש.

בקצוות נקבל נקודות מינימום, בשני המקרים הגבול ישאף ל-0.

לבסוף, נבדוק התכנסות בנורמה:

נזכיר ♥ שבתרגול הקודם הראנו ש $\|x^n\|_1, \|x^n\|_2 \to 0$.

אז גם:

$$\|f_n(x)\|_1=\|x^n-x^{2n}\|_1 \overset{\text{אי' המשולש}}{\leq} \|x^n\|_1+\|x^{2n}\|_1$$

נפתור לפי השיטה הרגילה:

$$\|f_n(x)\|_1=\int_0^1|x^n-x^{2n}|\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx \to 0$$

באופן דומה, $\|f_n(x)\|_2\to 0$, כלומר $\{f_n\}$ מתכנסת ל-0 בנורמות 1,2.

אנליזה הרמונית/משפט דיריכלה

משפט דיריכלה לגבי התכנסות נקודתית של טור פוריה

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ ויהי $S(x)$ טור פוריה של f.

תהי $x_0\in(-\pi,\pi)$.

אם הגבולות החד צדדיים קיימים ב-x_0, אז:

$$S(x_0)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)}{2}$$

סימון:

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)\qquad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$$

מסקנה:

אם f רציפה, אז: $S(x_0)=f(x_0)$

תרגיל:

תהי f הפונקציה:
$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ x+\pi & -\pi\le x<0\end{cases}$$

א. מצאו טור פוריה מרוכב של f ובאמצעותו מצאו את הטור הממשי.

נזכר ש: $a_n=C_n+C_{-n}\quad b_n=i(C_n-C_{-n})$

פתרון:

נמצא את מקדמי פוריה C_n:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)e^{-inx}dx\quad \begin{cases}u=x+\pi & v'=e^{-inx}\\ u'=1 & v=\frac{e^{-inx}}{-in}\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(x+\pi)e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}1\cdot\frac{e^{-inx}}{-in}dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{-in}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{0}e^{-inx}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi in}\left(-\pi+\frac{e^{-inx}}{in}\Big|_{-\pi}^{0}\right)=\frac{1}{2\pi in}\left(-\pi+\frac{1}{in}\left(-1+e^{i\pi n}\right)\right)$$

$$e^{in\pi}=\cos\pi n+i\sin\pi n=(-1)^n$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi in}\left(-\pi+\frac{(-1)^n-1}{in}\right)\qquad n\neq 0$$

עבור $n=0$ נקבל:

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\Big|_{-\pi}^{0}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right)=\frac{\pi}{4}$$

נמצא את a_n,b_n

נקבל: $a_0=2C_0=\frac{\pi}{2}$

כאן a_n: עבור $n\neq 0$

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{2\pi i n}\left(-\pi + \frac{(-1)^n-1}{in}\right) + \frac{1}{-2\pi i n}\left(-\pi + \frac{(-1)^{-n}-1}{-in}\right)$$

$$(-1)^n = (-1)^{-n}$$

$$= \cancel{-\frac{\pi}{2\pi i n}} + \frac{(-1)^n-1}{-2\pi n^2} + \cancel{\frac{\pi}{2\pi i n}} + \frac{(-1)^n-1}{-2\pi n^2} = \frac{(-1)^n-1}{-\pi n^2} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

אם $n=2k$ $\quad a_n=0$

אם $n=2k-1$

$$a_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)^2}$$

באופן דומה:

$$b_n = i\left(C_n - C_{-n}\right) = i\left(\frac{\pi}{-2\pi i n} - \frac{\pi}{2\pi i n}\right) = -\frac{1}{n}$$

סה"כ:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x) - \frac{1}{k}\sin kx\right) + \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\frac{a_0}{2}}$$

ב. חשבו את:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

פתרון:

נשתמש בדיריכלה.

נציב, עבור $x_0=0$:

$$S(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{\pi}{4}$$

נזכור ש:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0\le x\le \pi \\ x+\pi & -\pi\le x<0 \end{cases}$$

הנגזרות החד צדדיות קיימות ב-0.

$$\{f'_+(0)=0,\ f'_-(0)=1\}$$

לפי דיריכלה:

$$S(0) = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

לכן, נקבל:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. עבור $x_0=\frac{\pi}{2}$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$$

כאשר $k=2m$: $\sin\left(\frac{\pi 2m}{2}\right)=0$

וכאשר $k=2m-1$: $\sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2}\right) = (-1)^{n+1}$

כלומר,

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \frac{\pi}{4}$$

נחשב $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$ לפי דריכלה. הפונקציה אינה רציפה ב $x_0=\frac{\pi}{2}$ [illegible] ולכן:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right)}{2} = 0$$

נקבל:

$$0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

תזכורת:

תהי f רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$, ונסמן ב-S את טור פורייה של f:

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

התכנסות נקודתית - דיריכלה:

אם קיימות הנגזרות החד צדדיות $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ (כאשר $x\in(-\pi,\pi)$)

אז: $S(x_0)=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

התכנסות במידה שווה - אם f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$

ו-f' רציפה למקוטעין, אז $S(x)$ מתכנס במ"ש ל-$f(x)$ (ובפרט מתכנס נקודתית)

כאשר S מתכנס במ"ש ל-f, אפשר לגזור את S איבר-איבר ולקבל

טור פורייה של f': $f'\sim\sum a_n n\sin nx+b_n n\cos nx$

שוויון פרסבל:

(תחת אותם תנאים של רציפות~) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)$

אינטגרציה של טור:

אפשר לבצע אינטגרציה איבר-איבר של S, הטור של f ונקבל:

$$\int f(x)dx=\frac{a_0x}{2}+\sum\left(\frac{a_n}{n}\sin(nx)-\frac{b_n}{n}\cos(nx)\right)+C$$

תרגיל:

נתונה הפונקציה $f(x)=|\sin x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

טור פורייה של f הוא:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

כאשר $b_n=0$, $a_0=\frac{4}{\pi}$, $a_1=0$, $a_{2k-1}=0$, $a_{2k}=\frac{4}{\pi(1-4k^2)}$

נגדיר את הפונקציה $g(x)$:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$$

א. צ"ל את g מוגדרת היטב.

ראשית, נראה ש-f מקיימת את התנאים הדרושים להתכנסות במ"ש.

f רציפה בקטע. כמו כן: $f(\pi)=0=f(-\pi)$.

כעת: $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\\ -\sin x & x<0\end{cases}$ לכן: $f'(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x\\ -\cos x & x<0\end{cases}$

עבור $x=0$ אין נגזרת אבל זה לא משנה, f' רציפה למקוטעין.
סה"כ התנאים הדרושים מתקיימים ולכן הטור S מתכנס במ"ש ל-f.
לכן, אפשר לגזור איבר-איבר ונקבל:

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx) = g$$

כדי לצייר את g, נבדוק התכנסות נקודתית של הטור.
בכל נקודה $0 \neq x_0 \in (-\pi,\pi)$ f' גזירה ולכן $g(x_0) = f'(x_0)$.
בנקודה $x=0$, לפי דריכלה:

$$g(0) = \frac{f'(0^+) + f'(0^-)}{2} = 0$$

ובקצוות:

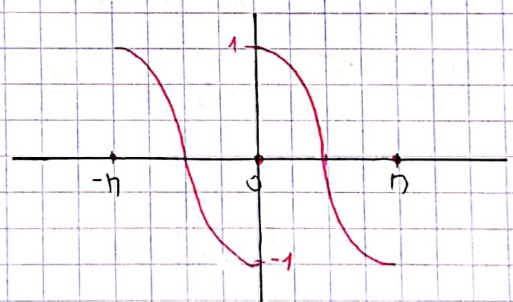
$$g(-\pi) = \frac{f'(-\pi^+) + f'(\pi^-)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$g(\pi) = \frac{f'(\pi^-) + f'(-\pi^+)}{2} = \frac{(-1)+1}{2} = 0$$

סה"כ

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & x>0 \\ -\cos x & x<0 \\ 0 & x=0, \pm\pi \end{cases}$$

נצייר:



ה. חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$, $\sum \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$

נזכר ש: $b_n = 0$, $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_{2k+1} = 0$, $a_{2k} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$

כלומר:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos 2kx$$

שוויון מתקיים-בסעיף א' הוכחנו התכנסות במ"ש ולכן יש גם התכנסות נקודתית.

נציב $x=0$:

$$|\sin(0)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(0)$$

$$-\frac{2}{\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \quad / \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

בפרט עבור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ נציב $x=\frac{\pi}{2}$

בפרט עבור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ נשתמש בפרסבל:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\right|^2$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(4k^2-1)^2}$$

סה"כ $$\sum \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

קורס: מבחנים ל מתמטיקה
אנליזת פוריה

תרגול 10/אונליין

מבחן תשע"ג

תרגיל:

חשבו טור פוריה מרוכב של $f(x)=e^x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ חשבו את הסכום $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2}$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)$$

(ניתן להציב ש n שלם לא נסדר לצמצם C_n בהכרח)

והטור הוא סכום:

$$e^x\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)e^{inx}$$

3 אופציות לחישוב טורים:
דריכלה
פרסבל
אינטגרציה/גזירה

נשתמש בפרסבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|C_n|^2$$

ראשית, נחשב את צד שמאל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}dx=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\left[e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right]$$

שנית, נסדר את צד ימין:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{4\pi^2}\left|\frac{1}{1-in}\right|^2\left|e^{\pi}\cdot e^{-n\pi i}-e^{-\pi}e^{\pi n i}\right|^2=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\cdot\left|e^{\pi}(\cos(n\pi)-i\sin(n\pi))-e^{-\pi}(\cos(n\pi)+i\sin(n\pi))\right|^2$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\left|e^{\pi}(-1)^n-e^{-\pi}(-1)^n\right|^2=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\left|(e^{\pi}-e^{-\pi})(-1)^n\right|^2$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\left(e^{2\pi}-2+e^{-2\pi}\right)$$

ומפרסבל:

$$\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^2$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}=\pi\,\frac{(e^{\pi}+e^{-\pi})(e^{\pi}-e^{-\pi})}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}=\frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

תרגיל: (השלמה)

האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$ הוא טור פוריה של f רציפה?

אם כן, האם f גזירה ברציפות?

נרשום:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cos(nx)$$

נזכר במבחן ויירשטראס:

אם קיים טור מספרים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כך ש $|f_n(x)| \le a_n$

לכל n ולכל x בקטע, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

אצלנו מתקיים:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^{\frac{3}{2}}} \right| \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

טור המספרים: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס, לכן לפי ויירשטראס

הטור שלנו:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס במ"ש ובפרט גם מתכנס נקודתית.

נוכל לרשום:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

כל אחת מהפונקציות $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^{\frac{3}{2}}}$ היא רציפה, והטור מתכנס במ"ש

ולכן גם f - סכום הטור היא רציפה.

האם f גזירה? כשגוזרים את הטור, נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(nx)}{n^{\frac{1}{2}}}$$

הטור כבר לא מתכנס במ"ש. ולכן הפונקציה f' כבר לא רציפה.

טור פורייה בקטע כללי

תהי f רציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$.

טור פורייה של f הוא:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right)$$

כאשר:

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx$$

תרגיל: (תשעג, ב-ב)

בעזרת טור פורייה של $f(x)=(x-\pi)^2$ בקטע $[0,2\pi]$ חשבו את הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

פתרון:

נחשב את הטור. אצלנו $a=0$ $b=2\pi$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{3\pi}\left(\pi^3-(-\pi)^3\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos\left(\frac{2\pi nx}{2\pi-0}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)\,dx$$

בחלקים:

$u=(x-\pi)^2 \to u'=2(x-\pi)$

$v'=\cos nx \to v=\frac{\sin nx}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{(x-\pi)^2\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}2(x-\pi)\frac{\sin nx}{n}dx\right) = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nx\,dx$$

בחלקים:

$u=x-\pi \quad u'=1$

$v'=\sin nx \quad v=-\frac{\cos nx}{n}$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\left.\frac{-(x-\pi)\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}1\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}dx\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{n}-\left(\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{n}\overbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx}^{0}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\sin\left(\frac{2\pi nx}{2\pi-0}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\sin nx\,dx =$$

בחלקים:

$u=(x-\pi)^2 \quad u'=2(x-\pi)$

$v'=\sin nx \quad v=\frac{-\cos nx}{n}$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(x-\pi)^2 \cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2(x-\pi)\cdot \frac{-\cos nx}{n}\, dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n} - \left(\frac{-\pi^2}{n}\right) + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\cos nx\, dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\cos nx\, dx$$

בחלקים:

$$u = (x-\pi) \qquad u' = 1$$

$$v' = \cos nx \qquad v = \frac{\sin nx}{n}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\underbrace{\frac{(x-\pi)\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} 1\cdot \frac{\sin nx}{n}\, dx}_{0} \right) = 0$$

סה"כ:

$$(x-\pi)^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx$$

אז נוכיח את $\sum \frac{1}{n^4}$ ולכן נשתמש בפרסבל:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2\, dx$$

$$\frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2 = \frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}\left((x-\pi)^2\right)^2 dx$$

$$\frac{2\pi^2}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\,\frac{(x-\pi)^5}{5}\Big|_0^{2\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{5\pi}\left(\pi^5 - (-\pi)^5\right) - \frac{2\pi^4}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9}}{16} = \frac{\pi^4}{90}$$

טור סינוסים וטור קוסינוסים

תהי f רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$

טור סינוסים של f בקטע $[0,\pi]$ הוא:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

טור קוסינוסים של f בקטע $[0,\pi]$ הוא:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$$

תרגיל השאלה ג,ד:

בעזרת טור סינוסים של: $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

חשבו את הסכום:

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\dots$$

פתרון:

אנו צריכים לחשב את: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

נחשב את הטור.

$$f(x)=\pi x-x^2$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi x-x^2)\sin nx\,dx$$

בחלקים:

$$u=\pi x-x^2 \qquad u'=\pi-2x$$
$$v'=\sin nx \qquad v=-\frac{\cos nx}{n}$$

$$=\frac{2}{\pi}\Bigg(\underbrace{-\frac{(\pi x-x^2)\cos nx}{n}\Bigg|_0^\pi}_{0}-\int_0^\pi(\pi-2x)\cdot\frac{-\cos nx}{n}\,dx=\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi(\pi-2x)\cos nx\,dx$$

$$=$$

בחלקים:

$$u=\pi-2x \qquad u'=2$$
$$v'=\cos nx \qquad v=\frac{\sin nx}{n}$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(\frac{(\pi-2x)\sin nx}{n}\Bigg|_0^\pi-\int_0^\pi -2\,\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)=\frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi\sin nx\,dx=-\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^\pi$$

$$=-\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)$$

כלומר:

$$b_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{8}{\pi(2k-1)^3} & n=2k-1\end{cases}$$

ולכן הטור:

$$x(\pi-x)\underset{\text{רציפה}}{\approx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin((2k-1)x)$$

f רציפה ולכן יש שוויון (רציפה)

נציב $x=\frac{\pi}{2}$: $\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1}$

נקבל:

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}(-1)^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

פרסבל מוכלל:

תהיינה f,g שתי פונקציות רציפות למקוטעין ב$[-\pi,\pi]$.

a_0,a_n,b_n - מקדמי פוריה של f

A_0,A_n,B_n - מקדמי פוריה של g

אזי:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n+b_nB_n)$$

תרגיל:

תהי f רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$. a_0,a_n,b_n מקדמי פוריה של f.

נזכור ש:

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

מצא טור מספרי ל: $\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx$

פתרון:

נשתמש בפרסבל מוכלל.

המקדמים של x הם: $B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $A_0=A_n=0$.

לפי פרסבל:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx=\frac{a_0\cdot 0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot 0+b_n\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n}b_n$$

הגדרת פו"ה:

נאמר שf רציפה למקוטעין ב-$\mathbb{R}$ אם f רציפה למקוטעין בכל קטע סופי $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

נאמר שf אינטגרבילית בהחלט אם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ מתכנס.

נסמן ב-$G(\mathbb{R})$ את קבוצת הפונקציות הרציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט.

תהי $f\in G(\mathbb{R})$. התמרת פו"ה של f מוגדרת כך:

$$F(\omega)=F[f](\omega)=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

משפט:

א. F רציפה

ב. $\lim_{\omega\to\pm\infty}F(\omega)=0$

תרגיל:

חשבו את התמרת פורייה של:

$$f(x)=\begin{cases} x & |x|\le a \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פתרון:

נחשב את ההתמרה:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} x\,e^{-i\omega x}\,dx=\left\{\begin{matrix} f=x & g'=e^{-i\omega x} \\ f'=1 & g=\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\end{matrix}\right. \text{בחלקים:}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x e^{-i\omega x}}{-i\omega}\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}1\,\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{a e^{-i\omega a}+a e^{i\omega a}}{-i\omega}+\frac{1}{i\omega}\int_{-a}^{a}e^{-i\omega x}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{a}{-i\omega}\left(e^{-i\omega a}+e^{i\omega a}\right)+\frac{1}{i\omega}\cdot\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi i\omega}\left(-a\left(e^{-i\omega a}+e^{i\omega a}\right)-\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega a}-e^{i\omega a}\right)\right)$$

מצאנו את $F(\omega)$ לכל $\omega\neq 0$.

נחשב את $F(0)$:

$$F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\cdot 0\cdot x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} x\,dx=\frac{1}{2\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a}=0$$

(פונקציה אי זוגית בתחום סימטרי)

מכיוון ש-f רציפה, $\lim_{\omega\to 0}F(\omega)=F(0)$ וזו דרך נוספת למצוא את $F(0)$

חשוב לבדוק תמיד אם יש ω במכנה ולהציב אפס!

תכונות נוספות של ההתמרה:

א. לינאריות: אם $f,g\in G(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

אז:

$$F(\alpha f+\beta g)(\omega)=\alpha F(f)(\omega)+\beta F(g)(\omega)$$

ב. הזזה: אם $f\in G(\mathbb{R})$ ו- $a,b\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ אז:

$$F[f(ax+b)](\omega)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}F[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

תרגיל:

נתונה הפונקציה $f(x)=e^{-x^2}$

ידוע שהתמרת פורייה של f היא:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Scanned by CamScanner

מצאו את התמרת פוריה של:

$$g(x) = e^{-4x^2-4x-1}$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$g(x) = e^{-4x^2-4x-1} = e^{-(x+2)^2}$$

כלומר:

$$g(x) = f(2x+1)$$

נשתמש בתכונת ההזזה.

אצלנו, $a=2$ $b=1$

נקבל:

$$F[g(x)](\omega) = F[f(2x+1)](\omega) = \frac{1}{|2|} \cdot e^{\frac{i\omega \cdot 1}{2}} F[f]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{i\omega}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{4}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\omega}{2} - \frac{\omega^2}{16}}$$

1. ~~ג~~ התמרה של $f(x)$ היא $F(w)$

אם f' גם אינטגרבילית בהחלט, ו- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, אזי:

התמרה של $f'(x)$ היא $iwF(w)$

הכללה: אם f גזירה n פעמים, והנגזרות מסדר k שואפות לאפס באין סוף ואינטגרביליות בהחלט, אז:

$$\widehat{f^{(n)}}(w)=(iw)^n\hat{f}(w)$$

2. אם גם xf אינטגרבילית בהחלט, אזי

$$\widehat{xf(x)}(w)=i\hat{f}'(w)$$

הכללה:

$$\widehat{(x^n f(x))}(w)=i^n\hat{f}^{(n)}(w)$$

תזכורת:

$$\widehat{e^{icx}f(x)}(w)=\hat{f}(w-c)$$

וגם

$$\widehat{(f(x)\cos cx)}(w)=\frac{1}{2}\left(\hat{f}(w-c)+\hat{f}(w+c)\right)$$

$$\widehat{(f(x)\sin cx)}(w)=\frac{1}{2i}\left(\hat{f}(w-c)-\hat{f}(w+c)\right)$$

עבור $a\neq 0$ ו- $b\in\mathbb{R}$:

$$\widehat{f(ax+b)}(w)=\frac{1}{|a|}e^{iwb/a}\hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$$

תרגיל

חשבו את התמרת פורייה של

$$f(x)=\begin{cases}1 & -a\le x\le a\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{-iwx}dx=-\frac{1}{2\pi iw}e^{-iwx}\Big|_{-a}^{a}$$

$$=-\frac{\sin(aw)}{\pi w}$$

תרגיל

חשבו את התמרת פורייה של

$$f(x)=\begin{cases}x & -a\le x\le a\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נשים ♡ שחישבנו כבר $\hat{g}(w)$ עבור

$$g(x)=\begin{cases}1 & -a\le x\le a\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

ו: $f(x)=xg(x)$

וגם

$$\hat{f}(w)=i\hat{g}'(w)$$

$$=i\left(\frac{\sin aw}{\pi w}\right)'$$

$$=\frac{i}{\pi}\left(\frac{\sin aw}{w}\right)'=\frac{i}{\pi}\left(\frac{a\cos aw}{w}-\frac{1}{w^2}\sin aw\right)=\frac{i}{\pi}\left(\frac{aw\cos aw-\sin aw}{w^2}\right)$$

תרגיל

תהי f ואיף אינטגרבילית בהחלט ורציפה למקוטען ב $\mathbb{R}$. תהי $F(\omega)=\hat{f}$

נגדיר $g(x)=f(2x+1)\cos 3x$

מצאו את $\hat{g}(\omega)$

תחילה נמצא את $\widehat{f(2x+1)}(\omega)$

לפי הנוסחה

$$\frac{1}{2}e^{i\omega/2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

נכפיל ב $\cos 3x$ ונקבל לפי הנוסחה:

$$\widehat{f(2x+1)\cos 3x}=\frac{1}{2}e^{i\omega/2}\cdot\frac{1}{2}\left(F\left(\frac{\omega-3}{2}\right)+F\left(\frac{\omega+3}{2}\right)\right)$$

הכדרי: יש g $\quad \widehat{(g(x)\cos cx)}(\omega)=\frac{1}{2}(\hat{g}(\omega-c)+\hat{g}(\omega+c))$

תרגיל

תהי f אינטגרבילית בהחלט ורציפה למקוטען

$$g(x)=f'(x+3)$$

מצאו את התמרת של g.

$$\widehat{f(x+3)}(\omega)=e^{3i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\widehat{(f'(x+3))}(\omega)=i\omega\widehat{f(x+3)}=i\omega e^{3i\omega}\hat{f}(\omega)$$

תרגיל

נתונה הפונקציה

$$f(x)=x\sin x\, e^{-a|x|}$$

תהי $F(\omega)$ התמרת של f.

תשבו את:

$$I=\int_0^\infty F(\omega)-\overline{F(\omega)}\,d\omega$$

תלמנה - אם f זוגית, אז $\hat{f}$ זוגי

הוכחה $\quad \hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$

נעשה החלפת משתנים $t=-x$, $dx=-dt$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}f(-t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underset{\uparrow}{f(t)}e^{i\omega t}dt=\hat{f}(-\omega)$$

(זוגיות f)

תזכורת: אם f ממשית אז: $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$

הוכחה:

$$\overline{\hat{f}(\omega)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx} = \frac{1}{2\pi}\int \overline{f(x)}\, \overline{e^{-i\omega x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx = \hat{f}(-\omega)$$

$f(x) = x\sin x\, e^{-a|x|}$ ממשית וזוגית.

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

לכן $I=0$.

אנליזה הרמונית/התמרה הפוכה

נזכיר שהתמרת פוריה של פונקציה f (אינטגרבילית) בתחום רציפה וגזירה למקוטעין) מוגדרת כך:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

משפט ההתמרה ההפוכה: בכל נקודה x שבה קיימות הנגזרות החד צדדיות (כמו נגזרת) אז:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

תרגיל:

נתונה הפונקציה:

$$g_k(t)=\begin{cases}1 & -\frac{k}{2}\le t\le\frac{k}{2}\\ 0 & \frac{k}{2}<|t|\end{cases}$$

א) חשבו את: $F[g_k](\omega)$

פתרון:

לפי ההגדרה:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g_k(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\frac{\omega\pi}{2}}-e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{-i\omega}$$

נזכור ש: $\sin\frac{\omega k}{2}=\frac{e^{\frac{i\omega k}{2}}-e^{-\frac{i\omega k}{2}}}{2i}$

$$F(\omega)=\frac{\sin(\frac{k}{2}\omega)}{\pi\omega}$$

נחשב בנפרד את $F(0)$:

$$F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}1dt=\frac{k}{2\pi}$$

ב) חשבו את:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

בעזרת ההתמרה ההפוכה.

ההתמרה הפוכה:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{g_k(x^+)+g_k(x^-)}{2}$$

אצלנו:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\frac{k}{2}\omega)}{\pi\omega}e^{i\omega x}=\frac{g(x^+)+g(x^-)}{2}$$

נציב $x=0$, $k=2$, ונכפיל את π החוצה ונקבל:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{g_2(0^+)+g_2(0^-)}{2}$$

$g_2(0^+)=g_2(0^-)=1$ ונקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\pi\,\frac{1+1}{2}=\pi$$

ב) חשבו את:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega$$

פתרון:

נשתמש בנוסחה של זווית כפולה:

$$\sin\omega\cos\omega=\frac{\sin 2\omega}{2}$$

ונקבל:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\omega}{2\omega}d\omega$$

נציב $y=2\omega$ $dy=2d\omega$ כלומר: $d\omega=\frac{1}{2}dy$

נקבל:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy\underset{\text{ע"פ סעיף קודם}}{=}\frac{\pi}{2}$$

נוסחת פלנשרל:

הגדרה: $f,g\in G(\mathbb{R})$ שמקיימות:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx,\ \int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx<\infty$$

אז:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}F[f](\omega)\overline{F[g](\omega)}\,d\omega$$

בפרט אם $f=g$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F[f](\omega)|^2d\omega$$

תרגיל:

נתונה הפונקציה:

$$g(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ 4 & 1<x\le 2\\ 0 & |x|>2\end{cases}$$

א) חשבו את $F[g](\omega)$. מוגדים:

$$F[g](\omega)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\sin 2\omega-\sin\omega}{\omega}\right)$$

ב) חשבו את:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\sin 2t - \sin t)^2}{t^2}\, dt$$

פתרון:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\sin 2t - \sin t}{t}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot F[g](t)\right)^2 dt$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(F[g](t)\right)^2 dt$$

לפי פלנשרל:

$$= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g(x))^2 dx = \frac{\pi}{8}\left(\int_{-2}^{-1} 4^2 dx + \int_{-1}^{1} 2^2 dx + \int_{1}^{2} 4^2 dx\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}(16 + 8 + 16) = 5\pi$$

תרגיל:

לכל מספר טבעי a נגדיר:

$$f_a(x) = \begin{cases} a - |x| & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

א) חשבו את התמרת פוריה של $f_a(x)$:

מקבלים:

$$F[f_a](\omega) = \frac{1 - \cos(a\omega)}{\pi\omega^2}$$

ב) חשבו את:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos\omega)(1 - \cos 2\omega)}{\omega^4}\, d\omega$$

פתרון:

$$= \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos\omega)(1 - \cos 2\omega)}{\pi^2 \omega^4}\, d\omega = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\omega}{\pi\omega^2} \cdot \frac{1 - \cos 2\omega}{\pi\omega^2}\, d\omega$$

לפי פרסבל:

$$= \pi^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2 - |x| & |x| < 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

המכפלה מתאפסת מחוץ לתחום $-1<x<1$, ולכן:

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-|x|)(2-|x|)}_{\text{זוגית}}\, dx$$

בתחום $[0,1]$ $x=|x|$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_{0}^{1}(1-x)(2-x)\, dx = \pi\int_{0}^{1}(2-3x+x^2)\, dx = \pi\left(2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \pi\left(2-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$