תרגיל 3

1. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות לגבולות הרשומים בצד ימין.

א. 0 $a_n = \frac{1}{n+27}$

ב. 1 $\mathrm{a_n} = \frac{n+3}{n+32}$

ג. 4 $\mathrm{a_n} = \frac{4n^2-25}{n^2-16}$

2. מיצאו את הגבולות של הסדרות הבאות והוכיחו כי הן מתכנסות אליהם, או הוכיחו כי הן אינן מתכנסות.

א. $\mathrm{a_n} = \frac{(-1)^n}{n^8}$

ב. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n+24}$

ג. $a_n = \frac{n^3-n^2+\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}$

3. הוכיחו כי $a_n = \frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}$ לא מתכנסת ל-$\frac{1}{7}$.

4. הוכיחו כי $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ לא מתכנסת.

5. להזכירכם, הגדרנו: סדרה ממשית (a_n) מתכנסת למספר הממשי L אם:

לכל $0 < \epsilon$ ממשי קיים N טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

א. הראו כי אם בהגדרה לעיל משנים את $n > N$ ל-$n \geq N$ מתקבלת הגדרה שקולה.

הגדרה שקולה כלומר: כל סדרה שמתכנסת לפי ההגדרה לעיל מתכנסת גם לפי ההגדרה עם $n \geq N$ ולאותו גבול, ולהיפך.

ב. באופן דומה, הראו כי אם משנים את $|\mathrm{a_n} - \mathrm{L}| < \epsilon$ בהגדרה לעיל ל- $|\mathrm{a_n} - \mathrm{L}| \leq \epsilon$, מתקבלת הגדרה שקולה.

ג. הראו שההגדרה לעיל ***איננה*** שקולה להגדרה בה משנים את $\epsilon > 0$ ל- $\epsilon \geq 0$.

6. תהי a_n סדרה המתכנסת למספר π. נגדיר סדרה חדשה b_n שזהה לסדרה המקורית a_n בכל אחד מהאינדקסים מלבד האינדקס 314, ובאינדקס זה מתקיים $b_{314} = 2a_{314}$. הוכיחו כי b_n מתכנסת גם היא למספר π.

7. היעזרו באי-שוויון המשולש:

א. תהי (a_n) סדרה המתכנסת ל-0. נגדיר $b_n = \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} a_k$. הוכיחו כי (b_n) מתכנסת ל-0.

ב. יהיו a, b, c מספרים ממשיים, ϵ, ζ ממשיים חיוביים. הוכיחו כי אם $|a-b| < \epsilon$, וגם $|b-c| < \zeta$ אז $|a-c| < \epsilon + \zeta$.

8. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\lim_{n\to\infty} |a_n| = L$ אז הסדרה (a_n) מתכנסת.

ב. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

ג. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = L$ אז קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$.