מבחן מועד א' תשע"ו-פתרון

16 ביוני 2018

חלק ב'
שאלה 3
א) מצא מס' מרוכב z המקיים $z^2 = \bar{z}$
ב) מצא לאילו ערכים של k למערכת הבאה:

$$\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 4x + 2ky - 2z = -4 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון
פתרון:
א) נבחר $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$(x+iy)^2 = x - iy$
$x^2 + 2xyi - y^2 = x - iy$

$$\begin{cases} 2xy = -y \\ x^2 - y^2 = x \end{cases}$$

ולכן $y(2x-1) = 0 \leftarrow y = 0$ או $x = -\frac{1}{2}$
אם $y = 0$ אזי $x^2 = x$ ולכן $x = 0, 1$
אם $x = -\frac{1}{2}$ אזי $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$ ולכן $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
סה"כ נקבל $z = 0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
ב) נבנה מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 2k & -2 & -4 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג נקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2k & 10 & -16 \\ 0 & 0 & k^2+3k-10 & -2k+16 \end{pmatrix}$$

אם $k^2 + 3k - 10 = 0$ כלומר $k_{1,2} = -5, 2$ נקבל שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת

אם $k=0$ אזי נקבל את המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -16 \\ 0 & 0 & -10 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בצורה המדורגת יש שורת אפסים ולכן יש אינסוף פתרונות.
בכל מקרה אחר יש פתרון יחיד.

שאלה 4

נתונה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א) מצא בסיס ומימד לתתי המרחבים הבאים:
$N(A), C(A)\bigcap R(A)$
ב)הסביאו לפי א' האם A הפיכה.
ג) מצאו מיהו המרחב הניצב ל: $span\{N(A), C(A)\bigcap N(A)\}$
פתרון:
א) נדרג את A ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון למערכת הומוגנית הינו:
$y=-z$
$x=z$
ולכן $N(A)=\left\{\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$R(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$C(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את $C(A)\bigcap R(A)$ בשיטת מיטל:
נמצא תנאי עבור $C(A)$:

$$R(A) = \begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

נמצא תנאי עבור $C(A)$:

$$C(A) = \begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

נבנה מערכת משוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+z=0 \\ x-z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

כדי לפתור את המערכת מבנה מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות שלמערכת יש רק פתרון האפס ולכן החיתוך הינו $\{0\}$.

ב) A לא הפיכה לפי א' כי למערכת ההומוגנית שלה יש גם פתרון לא טריוויאלי, כלומר יש פתרון ששונה מאפס ולכן המטריצה אינה הפיכה.

ג) לפי א' : $N(A)\bigcup\{0\}=N(A)$ ולכן המרחב הנוצב למרחב האפס של A הוא מרחב השורה $R(A)$.

שאלה 5

יהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס למרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.

א) הוכיחו כי לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$

ב) תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו שגם: $Av_1,Av_2,...,Av_n$ מהווה בסיס למרחב.

ג) תהי $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, $0\notin S$ קבוצה אורטוגונאלית (כלומר קבוצה שבה כל הוקטורים מעונכים אחד לשני, או באופן יותר פורמאלי $\langle v_i,v_j\rangle=0$ לכל $i\neq j$.

הוכיחו כי S בת"ל.

ד) האם קיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{3\times2}$ כך ש־ $C(A)=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$, $N(A)=sp\{(2,-1)\}$.

פתרון:

א) פתרנו בכיתה

ב) נרשום: $\alpha_1Av_1+...+\alpha_nAv_n=0$

צ"ל: $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$

הוכחה:

$A(\alpha_1v_1+....+\alpha_nv_n)=0$, A הפיכה ולכן לפי המשפט מההרצאה בהכרח $\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n=0$

אבל v_i , $1\leq i\leq n$ הם וקטורי הבסיס ולכן $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, כלומר $Av_1,Av_2,....,Av_n$ בת"ל.

ג) נרשום: $(*)\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_nv_n=0$

צ"ל: $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$

הוכחה: לפי הנתון, כל הוקטורים ב־S מאונכים אחד לשני.

בנוסף אם נבחר ב־S וקטור כלשהו ונעשה מכפלה פנימית עם הצירוף $(*)$ נקבל:

$$\langle\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n,v_i\rangle=\langle\alpha_1v_1,v_i\rangle+..+\langle\alpha_iv_i,v_i\rangle+...+\langle\alpha_nv_n,v_i\rangle=\underset{\langle0,v_i\rangle=0}{=}0$$

$$= \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + ... + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + ... + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 = 0$$

כל הוקטורים ב־S שונים מוקטור האפס ולכן בהכרח $\alpha_i = 0$.
זה נכון לכל α_i כאשר $1 \leq i \leq n$ ולכן הוקטורים ב־S הם בת"ל.
ד) נבנה מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$
נראה שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

מקיימת את תנאי השאלה:
נשים לב שהדרגה של המטריצה שווה לאחד.

$$C(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$