תרגיל 6 לינארית למורים באר שבע תש"ף

17 ביוני 2020

1. בדקו האם W תת-מרחב וקטורי של V.

(א) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\{(1,0),(0,1)\}$.

פתרון: לא תת מרחב כיוון ש $(0,0)\notin W$.

(ב) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}$.

פתרון: זהו תת מרחב. נוכיח:

- קיום וקטור האפס $(0,0)\in W$: אכן $(0,0)\in W$ (וקטור האפס מתקבל עבור $x=0$).
- סגירות לחיבור וקטורים: יהיו $(x_1,0),(x_2,0)\in W$ אזי החיבור שלהם $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$ גם ב W.
- סגירות לכפל בסקלר: יהא $(x,0)\in W$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי הכפל בניהם $\alpha(x,0)=(\alpha x,0)$ גם ב W.

(ג) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x,y\geq 0\right\}$.

פתרון: לא תת מרחב כיוון שאין סגירות לכפל בסקלר. למשל עבור $(2,2)\in W$ והסקלר $\alpha=-1\in\mathbb{R}$ הכפל בניהם $-1\cdot(2,2)=(-2,-2)$ שאינו ב W.

(ד) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x,y\geq 0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x,y\leq 0\right\}$.

פתרון: לא תת מרחב כיוון שאין סגירות לחיבור וקטורים. למשל עבור $(1,3),(-2,-2)\in W$ אבל החיבור בינהם

$$(1,3)+(-2,-2)=(-1,1)$$

שאינו ב W.

(ה) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+z^2=0\right\}$.

פתרון: לא תת מרחב כיוון שאין סגירות לכפל בסקלר. למשל עבור $(-4,0,2)\in W$ והסקלר $\alpha=5\in\mathbb{R}$ הכפל בניהם $5\cdot(-4,0,2)=(-20,0,10)$ אינו ב W.

(ו) $V=\mathbb{R}^4$, $W=\{(x,x+y,y+z,0)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

פתרון: זהו תת מרחב. נוכיח:

- קיום וקטור האפס $(0,0,0)\in W$: אכן $(0,0,0)\in W$ (וקטור האפס מתקבל עבור $x=0,y=0,z=0$).
- סגירות לחיבור וקטורים: יהיו $(x_1,x_1+y_1,y_1+z_1,0),(x_2,x_2+y_2,y_2+z_2,0)\in W$ אזי החיבור שלהם

$$(x_1,x_1+y_1,y_1+z_1,0)+(x_2,x_2+y_2,y_2+z_2,0)=(x_1+x_2,(x_1+x_2)+(y_1+y_2),(y_1+y_2)+(z_1+z_2),0)$$

גם ב W (מעיד על כך $x=x_1+x_2,y=y_1+y_2,z=z_1+z_2$).

- סגירות לכפל בסקלר: יהא $(x,x+y,y+z,0)\in W$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי הכפל ביניהם $\alpha(x,x+y,y+z,0)=(\alpha x,\alpha x+\alpha y,\alpha y+\alpha z,0)$ גם ב W.

2. נסמן: $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, ונסמן: $W=\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid AB=BA\}$. הוכיחו או הפריכו: W תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$.

פתרון: זהו תת מרחב. נוכיח:

- קיום מטריצת האפס $W\ni\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$: אכן מטריצת האפס מקיימת את התנאי $B\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}B$.
- סגירות לחיבור וקטורים: יהיו $A_1,A_2\in W$ אזי $A_1B=BA_1,\ A_2B=BA_2$ ואז

$$(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B=BA_1+BA_2=B(A_1+B_2)$$

ולכן A_1+A_2 מקיים את התנאי להיות איבר ב W.

- סגירות לכפל בסקלר: יהא $A\in W$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ אז $AB=BA$ ואז

$$(\alpha A)B=\alpha(AB)=\alpha(BA)=B(\alpha A)$$

ולכן αA מקיים את התנאי להיות איבר ב W.

3. ב-$V=\mathbb{R}_3[x]$, קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3 (כולל פולינום האפס), נתבונן בקבוצות:

$$W=\{ax^2\mid a\in\mathbb{R}\}$$

$$U = \{p(x) \mid xp'(x) = 3p(x)\}$$

כאשר p' מסמל את הנגזרת של p. בדקו האם U,W הם תתי-מרחבים וקטוריים של V. אם כן, מצאו פולינום ב: $U \cap W$.

פתרון: אכן אלו תתי מרחבים.

עבור W :

- קיום פולינום האפס $0 + 0x + 0x^2 \in W$: אכן פולינום האפס שווה ל $0 \cdot x^2$ (ניקח $a = 0$) ולכן הוא ב W .
- סגירות לחיבור וקטורים: יהיו $a_1x^2, a_2x^2 \in W$ והחיבור שלהם $a_1x^2 + a_2x^2 = (a_1 + a_2)x^2$ ב W (יעיד על כך $a = a_1 + a_2$).
- סגירות לכפל בסקלר: יהא $ax^2 \in W$ וסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ אז הכפל בניהם $\alpha \cdot ax^2 = (\alpha a)x^2$ ששיך ל W.

עבור U :

- קיום פולינום האפס $0 + 0x + 0x^2 \in U$: אכן פולינום האפס שווה מקיים כי $x \cdot \left(0 + 0x + 0x^2\right)' = 3 \cdot \left(0 + 0x + 0x^2\right)$ (שני האגפים שווים לפולינום האפס) ולכן הוא ב U .
- סגירות לחיבור וקטורים: יהיו $p_1(x), p_2(x) \in W$ אזי $xp_1'(x) = 3p_1(x), xp_2'(x) = 3p_2(x)$ ואז

$$\begin{aligned} x\left(p_1(x) + p_2(x)\right)' &= x\left(p_1'(x) + p_2'(x)\right) \\ &= xp_1'(x) + xp_2'(x) \\ &= 3p_1(x) + 3p_2(x) \\ &= 3\left(p_1(x) + p_2(x)\right) \end{aligned}$$

ולכן החיבור שלהם $p_1(x) + p_2(x)$ מקיים את התנאי להיות איבר ב U.

- סגירות לכפל בסקלר: יהא $p(x) \in U$ וסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ אז $xp'(x) = 3p(x)$ ואז

$$\begin{aligned} x\left(\alpha p(x)\right)' &= x\left(\alpha p'(x)\right) \\ &= \alpha\left(xp'(x)\right) \\ &= \alpha\left(3p(x)\right) \\ &= 3\left(\alpha p(x)\right) \end{aligned}$$

ולכן $\alpha p(x)$ מקיים את התנאי להיות איבר ב W.